ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ - СКОПЈЕ
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ОДДЕЛ
SECTION DES SCIENCES NATURELLES

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ANNUAIRE

КНИГА 2 TOME

СКОПЈЕ — SKOPJE
1949

ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ - СКОПЈЕ
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ОДДЕЛ
SECTION DES SCIENCES NATURELLES

ГОДИШЕН ЗБОРНИК
ANNUAIRE

КНИГА 2 TOME

СКОПЈЕ — SKOPJE
1949

Тираж 1000 егземплари

Штампа Југословенско штампарско предузеће — Београд

АТАНАСИЈЕ УРОШЕВИЋ

КУМАНОВО

(Примљено 5 маја 1949 год.)

АТАНАСИЈЕ УРОШЕВИЋ

КУМАНОВО

I ПОЛОЖАЈ

Куманово лежи у области оног познатог ниског развођа између долина Мораве и Вардара, управо на јужном крају тог развођа, у сливу Вардара, у границама Народне Републике Македоније.

Поред тога што лежи на тако важној уздужној саобраћајној артерији, оно је и саобраћајни чвор, јер се у њему и његовој ужој околини сустичу још неколике саобраћајне линије. Осим линије преко Скопља и долине Вардара од Куманова на југ иде још једна саобраћајна линија. То је линија која низ Кумановску Реку избија на Пчињу и, прелазећи је, иде на Овче Поље, Штип, Радовиш и Струмицу, да одатле избије на долину Вардара за Солун или да, преко Петрича, продужи за Серез и даље на исток. Ова је саобраћајна линија између северног и јужног дела Балканског Полуострва, преко Овчег Поља, како ћемо доцније видети, у прошлости била врло жива и све до грађења и пуштања у промет вардарске железничке пруге (1873) њоме је ишао највећи део путничког и трговинског промета.[1])

У упоредничком правцу пут из северозападног дела Македоније преко Полога и Скопља избија на Куманово или његову ужу околину и води за Кратово или уз долину Криве Реке за Криву Паланку и даље на исток. Од Скопља је на исток у овом правцу а преко Куманова или његове уже околине раније ишао саобраћај и из наших северозападних крајева, уколико је преко Косова и Качаничке Клисуре избијао у Скопље. Делом је тај саобраћај са Косова скретао на Горњу Мораву (гњилански крај) и преко планине Скопске Црне Горе избијао на кумановску област. А директан сао-

[1]) Ове године (1949) на овој линији се од Куманова до Св. Николе почела подизати железничка пруга.

брађај са Косова, а нарочито из Горње Мораве у том правцу, нарочито ка Куманову, ишао је доскоро једино преко Скопске Црне Горе. Он се одржава и даље, али је много попустио од спајања вардарске са моравском пругом (1888), када је Бујановце, добивши железничку станицу на тој прузи, привукло велики део промета Гњиланске Мораве. Тај саобраћај између Горње Мораве и Куманова или његове уже околине највећим је делом ишао путем, који је некада морао бити добро грађен и који се зато сада у народу зове *Друм* или *Старо Џаде*[2]). То је и једини пут који преко планине води у Куманово и његову околину; остали су путеви природно боље условљени.

Путеви према истоку иду преко Нагоричке Висоравни, чија је релативна висина изнад Куманова око 150 метара највише, а прешавши њу, иду речним долинама: долином Кратовске Реке за Кратово, а долином Криве Реке за Криву Паланку.

Садашња главна линија меридијанског правца иде с југа из долине Вардара. Избијање оне друге јужне природне саобраћајне линије са Овчег Поља на само Куманово, која је до грађења вардарске пруге, како видесмо, била врло жива и живља од линије у долини Вардара, природно је условљено. Дошло је скретањем Кумановске Реке или пиратеријом, коју је, по Цвијићу, извршила над њом приточица Пчиње[3]), чије је извориште било у садашњем најнижем делу Кумановске Реке, југоисточно од села Пројевца, или пак, како ми изгледа вероватније, дислокацијом земљишта у том делу.

Садашњи ток Кумановске Реке омогућава лако избијање те саобраћајне линије са Овчега Поља на само Куманово, иначе целокупна саобраћајна линија, разуме се, њоме није условљена. Видећемо доцније да је линија са Овчега Поља у кумановску област ишла и другим правцем, преко Нагоричина и још неких суседних места.

---

[2]) *А. Урошевић*, Горња Морава и Изморник. Насеља и порекло становништва, књ. 28, с. 67—68.

[3]) *J. Цвијић*, Основе за географију и геологију Македоније и Старе Србије, књ. I, Београд 1906, с. 150.

[4]) На дислокацију у виду раседа упућује не само постојање топле минералне воде код Пројевца („Кумановска Бања“), већ и стрм отсек на левој страни Кумановске Реке све до те топле минералне воде и нешто јужније, на коме се смењују слојеви шкриљаца и кречњака. Услед спуштања земљишта дуж раседа на садашњој десној страни Кумановске Реке долина је у том делу асиметрична: десна страна блага, а изнад леве отсек висок 30—40 метара непосредно изнад реке. Пре тога скретања Кумановска Река је текла западно од садашњег Куманова и преко садашње суводолице, у којој лежи Черкеско Село, избијала на долиницу којом тече Аџаларска Река, која је уствари њен остатак.

И из досадашњег излагања ширег или саобраћајног положаја видели смо да Куманово лежи на Кумановској Реци. Управо оно лежи код самог ушћа Липковске Реке у Кумановску Реку. Сем једне ваде, која се одваја од Липковске Реке ради наводњавања башта и гоњења воденица а која протиче кроз најнижи северни део града и једне новије ваде, такође одвојене од Липковске Реке, која захвата истурени крајичак града на северу, ниједна од ових река не протиче кроз град, ако не узмемо у обзир најистуреније и најуже нове крајичке града на Врањском и Паланачком Путу, које Липковска Река пресеца пред својим ушћем.

Сем тих истурених делова на Врањском и Паланачком Путу, које пресеца Липковска Река или које додирују обе реке, Куманово је за двеста до триста метара, како где, удаљено од тих река. Оно се протеже по вишем и оцедном земљишту на десној благој долинској страни. Само највишим јужним делом на Велешком Путу лежи изнад висине која одговара речној тераси на супротној страни Кумановске Реке, која је висока око 340 метара над морем.

II ПОСТАНАК И ПРОШЛОСТ

Куманово није давнашњи град. Оно се као градско насеље и то као мало градско насеље, као варошица, први пут помиње у другој половини 17 века. Биће да оно из тога века и датира као град.

Сасвим је друго питање од када датира оно као насеље уопште. Можда је оно доста старо, средњевековно, што би се дало судити по његовом имену, за које се узима да је дошло по Куманима, којих је било у средњевековној бугарској држави[5]), а исто тако и у средњевековној држави српској, где их је било у најамничкој војсци.[6]) Али се оно не помиње у тадашњим споменицима балканских словенских народа. Погрешно је оно код *Јована Хаџи Васиљевића* да се садашњи град Куманово у средњем веку помиње као село у дечанској хрисовуљи[7]). По том Хаџи Васиљевићевом делу или самостално и директно из те хрисовуље и *Коста Н. Костић* је рекао то исто, тј. да се садашње Куманово у 14 веку у једној дечанској хрисовуљи помиње као село[8]).

Једно насеље се као село под именом Куманова стварно помиње у тој дечанској хрисовуљи, само то није ово Куманово у Македонији, већ једно друго, којег нема више, а које

---

[5]) *Јиречек—Радонић,* Историја Срба, књ. I, с. 201, 212, 214. 246.

[6]) На истом месту, књ. II, с. 25.

[7]) *Јов. Х. Васиљевић,* Јужна Стара Србија, I, Кумановска Област, Београд 1909, с. 486—487.

[8]) *К. Н. Костић,* Наши нови градови на Југу, Београд 1922, с. 121.

је постојало тада на Косову, на његовој западној ивици, у подножју планине Голеша, близу границе између Косова и Дренице.

Текст дечанске хрисовуље, на основу које је Хаџи Васиљевић погрешно закључио да је то Куманово ово садашње Куманово у жеглиговској области, гласи: „**Мєгѣ Коуманновоу и Радоιєвоу коудѣ оутєса Богданъ соудиιа ѿ Ситиницє: оу камєнь вои постависмо на срѣдь барє такорє оу цѣстоу коιа гредє шд Радоιєва на камик кои постависмо на поути. Такорє уз бръдо на дель и на делоу ками постависмо такорє по делоу мєгю Коуманово и Ярхидιачє оу камєи кои постависмо како поуть излази из Кривє Бѣιє такорє прєс' поуть оу доль. И оузь доль оу влашка кукища и таки делом оу поуть кои поуть слази мєгю Коуманово и мєгю Бєлакιєв'ць на опогор право оу Лєскови Ками**“[9]).

Ослонац за овај закључак Хаџи Васиљевић налази у сличности имена Белакјевца са именом садашњег села Бељаковца у кумановском крају и имена Архидјаче са именом садашњег кумановског села Јачинца[10]).

У имену Белакјевца и садашњег села Бељаковца заиста има сличности, али довољно је загледати у карту и видети да тај Белакјевац није садашње Бељаковце, јер у хрисовуљи су Белакјевац и Куманово два суседна села („**мєгю Коуманово и мєгю Бєлакιєв'ць**“) док између садашњег града Куманова и Бељаковца у кумановском крају има пуна 24 километра у правој линији. А сасвим је јасно да Архидјача и Јачинце не могу бити исто, јер ту уопште нема сличности.

На Косову међутим постоји село Ариљача и та средњевековна Архидјача је стварно садашња Ариљача, која је и у самој хрисовуљи сигурно записана као Ариљача, односно Архиљача, али је, или услед нечитког рукописа рђаво прочитана или јој пак при преписивању *л* замењено са *д*, те испала Архидјача. — А Белакјевац ће сигурно бити садашње косовско село истога имена (Белаћевац). И што је главно, оба су ова села, и Ариљача, и Белаћевац, у међусобној близини. Ту је опет у непосредној близини и оно Радојево („**мєгιє Коуманновоу и Радоιєвоу**“), које се сада зове Радево.

То толико из тог тог дела хрисовуље, на који се ослањао Хаџи Васиљевић. Међутим, ако читамо хрисовуљу и даље, налазимо и друге потврде да то Куманово из дечанске хрисовуље није ово жеглиговско Куманово, већ неко друго, које је постојало на поменутој западној страни косовске котлине. Ту стоји: „**Єво како кралєвство ми посла соудию Богдана и Парабка оутєсати мєгιє Срѣднємоу Сєлоу и Коузминоу**“. Средњег Села сад нема на Косову, али Кузмин постоји и

---

[9]) Гласник Српског ученог друштва, II одељење, књ. XII, с. 26—27.
[10]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, с. 96.

налази се у близини Ариљаче, Белаћевца и Радева. Најзад, у овој се хрисовуљи поред имена Ситнице („Богданъ оудина ѡ Ситницє“) помиње и област Дреница, те је јасно да се помен тог средњевековног Куманова односи на неко тадашње насеље под тим именом у косовској, а не у жеглиговској области. Тог насеља на Косову, као наведосмо, сада нема, али интерпретацијом подата[illegible] из те дечанске хрисовуље излази да је било на месту садашње колоније Врело[11]).

А садашњи град Куманово се у то време уопште не помиње, ни као село. Нема о њему помена ни из раног турског доба, из 15 и 16 века. Путописци *Бенедикт Курипешић* (Rad Jug. akad. zn. i umj. LVI), *Ф. Петанчић* (Rad XLIX) и други, који, било са Косова или из Скопља путују преко садашње кумановске области, не помињу Куманово у својим путописима. У једном запису из 16 века се међу конацима цариградским, почев од Новог Пазара па према истоку, у садашњој кумановској области не помиње Куманово већ *Страцин*[12]). Један непознати венецијански путник из 1559 године на путу из Скопља за исток такође не помиње Куманово у своме путопису. Њему је у садашњем кумановском крају преноћиште било *Доброшане*[13]), село које и сад постоји на 10 км југоисточно од Куманова на тзв. Стамболском Путу.

Први помен града Куманова, и као града и као насеља уопште, имамо код познатог турског путописца *Евлије Челебије* из 1660 године. По Евлијиним речима да је Куманово војводлук, да је дуго било под скопским кадијом, види се да је било незнатно насеље и да је не много пре Евлијине посете постало нешто важније место, варошица. По Евлији, ако није претерао, како је имао обичај, Куманово је имало тада на 600 кућа, а уз то још џамију, текију, медресу, хан, хамам и известан број дућана[14]).

По том изразу „известан број дућана“ рекло би се да дућана није било много и да му је, дакле, чаршија била незнатна. Да Евлија узима Куманово као незнатно градско

---

[11]) Иако тај навод Хаџи Васиљевића и К. Н. Костића да се Куманово помиње у дечанској хрисовуљи *Вој. С. Радовановић* у Народној енциклопедији и, доцније, ја, у енциклопедиском лексикону „Свезнање“ код говора о Куманову, као погрешан уопште, нисмо узели у обзир, ипак се та њихова грешка још једнако провлачи кроз научну литературу. („Македония като природно и стопанско цяло“ од анонимног писца, София 1945, с. 135 и „Македонска градска насеља“ од *Јов. Ф. Трифуноског*. Београд 1947, с. 12).

[12]) *Љуб. Стојановић,* Стари српски записи и натписи, књ. II, ред. бр. 4601.

[13]) Rad LXXXIV, с. 72.

[14]) *Йорданъ Ивановъ*, Сѣверна Македония, с. 220.

насеље, види се и из тога, што код говора о Скопљу, као градове у његовој близини помиње Велес, Штип, Кратово, Криву Паланку, па чак и Призрен и Пећ[15]) док најсуседнија градска места Качаник и Куманово, о којима на другом месту посебно говори, ту уопште не наводи. А навод да је Куманово дуго било под скопским кадијом као да казује да је оно тада, у Евлијино доба, било младо градско насеље и да је раније, пре издвајања из скопског кадилука, било село. Да је Куманово у то доба било младо градско насеље, судимо и по једном гробу у џамијском дворишту из 1070 хиџријске, односно 1659 године наше ере, у коме је сахрањен неки *Хаџи Осман бин Сулејман,* за кога кумановски Турци из предања знају да је био први мутевелија те џамије. Значи да је та кумановска џамија била подигнута ту скоро, можда највише на две-три деценије пре смрти тога њеног првог старатеља — мутевелије. А то је прва кумановска џамија, по чему се турски и зове *Ески Џамија* (Стара Џамија). Друге старије џамије у Куманову није било. Она је управо сада и једина џамија у Куманову, јер је Нова Џамија из почетка 19 века порушена у балканском рату. Хаџи Васиљевићев навод да Стара Џамија у Куманову потиче из 1751 године, како тобож о томе гласи запис у џамији[16]) сасвим је нетачан, јер нити у џамији нити споља на џамији има уопште каквог записа или натписа о томе. Записа о зидању те џамије нема уопште и, како кумановски Турци кажу, није га ни било. Једино по предању веле да је ту џамију подигао неки Татар Синан паша.

Али иако младо и још незнатно градско насеље, Куманово се изгледа у то доба врло брзо развијало. Када се на тридесетак година по Евлијином пролазу, за време аустро-турског рата, приликом продирања Аустријанаца на Балкан 1689, вођа устаника из северног дела Македоније, *Карпош,* проглашава за „*краља од Куманова*“ [17]), значи да је Куманово у то доба било на добром гласу. Тај му глас свакако није долазио по броју дућана, већ по томе што је оно, окупљајући у себи многе саобраћајне линије услед свога погодног положаја и везујући тако преко себе околне области, добило знатну економску важност у *трговинском* погледу, у погледу размене добара. Било је, рекло би се, место с малом чаршијом а великим тргом, *трговиште вашарског типа,* какву је форму доживело оно још једном у својој прошлости, у 19 веку, како ћемо доцније то видети из одељка о привредном развитку.

[15]) *Гл. Елезовић,* Евлија Челебија о Скопљу. Зборник за историју Јужне Србије и суседних области, књ. I. Скопље 1936, с. 321—322.

[16]) *Јов. Х. Васиљевић* нав. дело, с. 51.

[17]) Die freiwillige Theilnahme der Serben und Kroaten an der vier letzten österreichisch-türkischen Kriegen. Wien 1854, с. 227—229.

Поменути аустријски поход на Балканско Полуострво је не само зауставио овај нагли развитак Куманова, већ је на њега, како ћемо из наредних одељака видети, и негативно утицао. Оно није ишчезло као насеље, јер се у току 18 века помиње двапут, једном у почетку (1706), када је на путу из Скопља кроза њ прошао Дубровчанин *Марин Маројица Кабога*[18]), и једном при крају тога века (1792), када је, такође на путу из Скопља, у њему заноћио један други Дубровчанин у пратњи једног дубровачког посланика на његовом путу у Цариград[19]). Свакако су га у то време скопски самозвани господари *Паљоши*, у чију је територију спадало[20]), вештачки, држећи га и даље као административно средиште тога краја, одржали и као привредно средиште, јер се због саобраћајне полицентричности у овом крају (укр-



Саобраћајна полицентричност кумановске околине
Размер 1:500 000.

штање путева у више тачака) почела стварати или, уколико су постојала, на рачун Куманова напредовати друга привредна средишта, као *Табановце*, *Нагоричино*, *Стрезовце* а нарочито *Клечовце*, јер је преко њега ишао тзв. Штипски или Солунски Пут, тј. онај пут који је из Солуна преко Штипа ишао за Поморавље и Београд.

У почетку 19 века Куманово се назива варошицом[21]), а током 19 века са све већим саображавањем и оживљавањем саобраћаја преко Скопља и долине Вардара на рачун пута

---

[18]) Споменик С. а. н. XXXIV, с. 221.
[19]) *Engel—Stojanović*, Povijest Dubrovačke Republike. Dubrovnik 1922, c. 214.
[20]) *Ст. Новаковић*, Балканска питања. Београд 1906, с. 108.
[21]) *К. Н. Костић*, нав. дело, с. 122.

преко Штипа, оно лагано али стално напредује, да подизањем друма Скопље—Врање кроза нь седамдесетих година прошлога века нагло отскочи у привредном погледу и Клечовце и остале такмичарске привредне центре баци у засенак.

Из те чињенице што је ужа околина Куманова *полицентрична* у погледу природних саобраћајних линија у средњем веку се не јавља привредно средиште на месту садашњег Куманова, јер видесмо да се оно тада и све до 17 века и не помиње уопште, већ је ту улогу за то време у жеглиговској области имало *Нагоричино*[22]).

По налазиштима старина исти се случај констатује и за античко доба. На 4 км западно-северозападно од Куманова у хатарима међусобно јако блиских села *Опаја, Лопата* и *Ржановца,* поред којих пролази садашња железничка пруга за Врање, нађене су и налазе се различите старине. На једном камену из 216 године наше ере пише да је камен поставио и Јупитеру посветио неки Ахилеј за здравље цара Марка Аурелија Антонина Августа и Јулије Августе[23]). По *Евансу* ту у томе пределу, односно у селу Лопатама треба тражити прву станицу на римском путу из Скопља у Ниш[24]). Један други камен, који је такође нађен у Лопатама и који потиче из 211 г. наше ере стоји да је ту тај храм подигао неки Аполонид. Станица на том месту се помиње као Statio LAMVD[25]). У истом селу је нађена и једна ара, чији натпис има везе са *култом Митре*[26]). Јужно-југоисточно од Куманова, близу села *Биљановца,* поред тзв. Стамболског Пута, оног, који је, како видесмо, од Скопља преко Доброшана водио на исток, сва је околина посејана комадима старога црепа, цигле, малтера, грнчарије итд. Ту су откривени темељи неких старих грађевина, затим један резервоар, трагови старог римског пута и један митреј[27]). По Хаџи Васиљевићу пак нигде у овој околини нема толико старина као

[22]) *Вој. С. Радовановић* у Народној Енциклопедији под: Куманово. — Нагоричино ће, мислим, бити оно насеље које под турским називом Крк Клиса (Четрдесет Цркава) на своме путу у Јерусалим наводи *Јеротије Рачанин,* за које каже да је „прежде била велика варош за србског господства“ и где се чак и тада, за његова путовања, 1704, пазар купио. (Гласник Српског ученог друштва XXXI, с. 298).

[23]) *Јов. Х. Васиљевић,* нав. дело, с. 404.

[24]) *Arthur John Evans,* Antiquarian Researches in Illyricum, Pars III, IV. Archaeologia or miscellaneous tracts relating to antiquity. Vol. XLIX, с. 95, 154.

[25]) *Мил. Кокић,* Трагови Митрина култа у Јужној Србији. Гласник Скопског научног друштва XII, с. 9.

[26]) На истом месту.

[27]) На истом месту, с. 2.

у *Клечовцу*. На њих се наилази на пространству за сат хода у дужини и ширини око овог села[28]).

III ПРИВРЕДНИ РАЗВИТАК

У ужој околини садашњег Куманова је у прошлости, бар од средњега века наовамо, морало увек бити неког привредног средишта, јер су околни градови доста удаљени да би разменом добара могли подмиривати потребе становништва. Од свих околних градова, не рачунајући ту скорашње и незнатне паланчице Прешево и Св. Николу, садашњем Куманову су најближи Скопље и Кратово, прво око 30, друго око 40 км. Сви други градови су му удаљени преко 50, а Штип чак и око 70 км. И, како видесмо из претходног одељка, на томе су простору, око састава Криве Реке и Пчиње и око јужног дела кумановско-прешевске повије и постојали привредни центри за овај крај, једни у једно, други у друго време,а некад, као оно у скорој прошлости, из оне особине саобраћајне полицентричности ове области, и по два или више таквих центара одједном[29]). Та појава условљавања више привредних центара је учинила да се на месту садашњег Куманова у средњем веку и све до 17 века под садашњим или којим другим именом не појави привредно средиште, већ је у тој области улогу привредног центра, како видесмо, имало Нагоричино, а поред њега, можда још које место.

И кад се Куманово у 17 веку први пут и помиње, из тога се његовог првог помена види да је то било слабо привредно средиште, да оно од привредних радњи, поред оног „извесног броја дућана“, како наведосмо у одељку о постанку и прошлости, има још само један хан.

Појава Куманова као привредног средишта показује да је оно надвладало своје конкурентне центре у својој ужој околини. Како је оно ту превагу достигло није познато; чини нам се да му је она дошла његовим избором за административно средиште жеглиговске области. На место опалог и запуштеног привредног центра у иначе хришћанском Нагоричину, са пуно цркава и њихових развалина, за центар је узето једно веће турско муслиманско село, које је уз то било и на згодном саобраћајном чвору, или му зато постојала природна условљеност. Било како било, к њему су се, кад је

---

[28]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, с. 421, 423—424.

[29]) Таква полицентричност је у косовској котлини место једног већег града проузроковала, не рачунајући Јањево, које је рудименат некадашњег рударства, шест средњих и мањих градких насеља. Види о томе: *А. Урошевић*, Главне карактеристике Косова Поља. „Јужни Преглед“, год. 1939, с. 362—363.

постало административно средиште, постојећи путеви почели повијати или се ка њему од њих одвајати посебни краци. И мора да се услед свега тога нагло подизало, ако му није указивана чак и нека нарочита пажња. Исто тако мора да је било на добром гласу по своме напретку, када је оно Карпош своју краљевску титулу везао за његово име.

Само је тај привредни полет Куманова кратко трајао. По повратку Турака 1690 г. после оног неуспелог аутријског похода у претходној години, када су Аустријанци помоћу домаћих устаника допрли били и до Овчег Поља, настаје самовлашће у Турској, услед чега су скоро сви наши градови били у опадању. Видесмо да се Куманово после тога у 18 веку, помиње двапут, једном у почетку, а једном при крају тога века, али само као место кроз које су ти путници прошли или у коме су преноћили, без икаквих других података. У почетку 19 века оно је већ имало карактер варошице, карактер насеља са тргом, те га *Божур* назива варошицом, а исто тако и *Пуквиљ* (»le bourg«)[30]). Као варошица са 300 кућа, колико наводи Пуквиљ, оно је тада имало извесну улогу привредног средишта, а уз то административним континуитетом, иако поремећеним, задржало и улогу административног средишта. По *Гризебаховом* путопису из 1839 видимо да је Куманово улазило у област скопског самозваног господара *Хивзи паше*[31]). Вероватно је оно и раније, и почетком 19 века, спадало у његову област, односно у област његовог рода, јер је овај род ту власт имао и у другој половини 18 века. Што је Куманово у првој половини 19 века прилично напредовало, мора се приписати доброј сигурности која је, по Гризебаху, владала на целој територији Хивзи пашине области, и што је Хивзи паша поклањао пажњу привреди и трговини, да је његова област била *најмирнија и најнапреднија* на Балканском Полуострву[32]). Не одговара тачности податак *Ханов,* који је дао по народном казивању, да је на тридесет година пре његове посете, тј. око 1830 г. Куманово било бедно село од 20 хришћанских и 20 турских кућа[33]), јер нешто доцније (1838) *Ами Буе* бележи да има око 3000 становника[34]), што би износило око 600 кућа. А видесмо да је и пре тога још 1807 г., за проласка Пуквиљева, бројало оно на 300 кућа. Претеривањем својим народ је хтео

---

[30]) *К. Н. Костић,* нав. дело, с. 122; *F. C. H. L. Pouqueville,* Voyage en Morée, a Constantinople, en Albanie etc. Paris 1805, c. 243.

[31]) *Ст. Новаковић,* нав. дело, с. 108.

[32]) На истом месту; *Ст. Симић,* Историја Кратовске Области. Годишњица Николе Чупића XXXIII, с. 170.

[33]) *J. G. von Hahn,* Reise von Belgrad nach Salonik. Wien 1868, c. 100.

[34]) *Ami Boué,* Recueil d'itineraires dans la Turque d'Europe. Vienne 1854. t. I. c. 304

да истакне нагло напредовање свога места. За Ханова обиласка оно је бројало на 680 кућа или 3500 становника[35]).

У то су време у непосредној околини Куманова на раскршћима путева, формирани можда још у 18 веку, као привредни центри постојали *Табановце, Нагоричино, Стрезовце* и *Клечовце*. У Табановцу је почетком овога века било трагова старих ханова у којима су ханџије, по народном знању, били Грци[36]). Један од тих ханова је радио све до спајања вардарске са моравском железничком пругом. У међуречју Пчиње и Криве Реке, у Стрезовцу и Клечовцу, било је више великих ханова који су под општим именом били познати као *Средоречки Ханови*. Један од њих, који је радио све до подизања железничке пруге, а који се у то време, по своме сопственику звао *Деда Стеванов Хан,* био је врло велики. Поред зидане зграде, „куле", у којој је било соба за преноћиште путника, имао је харове, у којима се могло сместити до 2000 коња, а уз то и своју пекарницу и питкивачницу. Све су те зграде уједно биле опасане високим зидом. Ханове у Клечовцу су посећивали паланачки и кратовски трговци и кириџије на својим путовањима за Велес и Штип и обратно, а ханове у Стрезовцу такви путници из Паланке и Кратова за Врање или косовске пределе. У тим се хановима, ако није било чак и других радњи у тим селима, водила и трговина, јер су по народном знању и сами Кумановци пре стотину година ишли у Клечовце на пазар.

Сва су ова места јако конкурисала Куманову, али се оно, од указиване му пажње као административном средишту од почетка 19 века, све више отрзало и нагло напредовало. Грађењем државних друмова седамдесетих година прошлога века, оно је постало њихово раскршће и тиме је надвладало конкурентске центре. Проласком железнице његовом непосредном близином и добивши своју железничку станицу, оно је не само учврстило своју доминацију над тим конкурентским центрима своје непосредне околине, него их је као привредне центре и потпуно угушило. Развитак Куманова у 19 веку, а нарочито од грађења тих државних путева седамдесетих година прошлога века, неповољно је деловао и на прилично удаљени стари град Кратово, јер му је Куманово са тржишта све већма привлачило и отрзало западни део његове околине.

Поставши тако један јединствени центар у својој околини, оно је добило и све услове за онај нагли развитак који је показало од друге половине 19 века, тако да је сада по величини броја свога становништва *четврти град* у

[35]) *J. G. von Hahn,* нав. дело, с. 100.
[36]) *Јов. Х. Васиљевић,* нав. дело, с. 200.
[37]) На истом месту, с. 33—34.

Народној Републици Македонији. Његово тржиште није чинило само стотину села његовог среза, већ су у његову тржишну област улазили и крајеви садашњих суседних срезова. Поред западних кратовских села у његову тржишну област је, због слабе развијености овчепољске варошице Св. Николе, улазио и цео северни део Овчег Поља. Због велике близине цео је Карадаг, како кумановски, тако и гњилански, више гравитирао Куманову него Гњилану. Према северу је прешевско-бујановачка област, која је пре рата 1877—78 административно потпадала под Врање, привредно била окренута кумановском тржишту. А после присаједињења Врања Србији у том рату, када је садашња прешевско-бујановачка област остала у Турској, и када се у Прешеву и Бујановцу стварају нови центри, у Бујановцу због железничке станице привредни, а у Прешеву и привредни и административни, та је област добрим делом и даље, због јачег кумановског тржишта, гравитирала Куманову. Кумановско тржиште је, како ћемо мало доцније видети, привлачило и трговце суседних градова, и то не само оних малих или нових, као Кратова, Криве Паланке и Прешева, већ и трговце старих и развијених градова Скопља и Велеса.

Да прегледамо тај привредни развитак Куманова у 19 веку.

Још *Пуквиљ* 1807 каже да се стока из Куманова извозила у Софију и Једрене, а вуна у Солун. Ту се наводи да су становници Куманова држали велика стада оваца, што је тачно, јер се зна да су се турски род Махмудбегови и македонски родови Чавдарци и сада изумрли Стојан-Ћеајини бавили сточарством и да су им трла („кршле") биле на месту садашњих касарни. Али неће бити да се ту продавала стока из самог Куманова, већ и стока из околине, тј. да је ту било тржиште стоке и да су, као и доцније, ради те трговине стоком долазили трговци из других, па чак и тако удаљених места. Куманово је и даље, за све време свога развитка, па и данас, углавном *трг стоке*. Ситна стока се, а нарочито овце, на кумановски трг догонила и догони највећма са Овчег Поља, а крупна стока највише из карадачких, козјачких и планинских села кратовске и паланачке околине. На кумановски трг су догонили стоку и сточни трговци са тргова околних градова или директно из околина тих градова. Тако је на пр. још око 1830, када се варошица Св. Никола почела развијати, па и доцније, око 1845, када је већ била боље развијена, стока са њеног трга гоњена у Куманово[39]).

[38]) *К. Н. Костић*, нав. дело, с. 122.

[39]) *М. Чучковић*, Варошица Св. Никола на Овчем Пољу. Гласник Скопског научног друштва XV—XVI, с. 278—279.

Трговци су чак и у новије време догонили стоку из прешевске области[40]), кратовске околине[41]), са трга у Гњилану[42]) итд. Ту су стоку у Куманову највећим делом куповали и извозили сточни трговци, којих је било две врсте. Једни су били домаћи трговци, највише Цигани (и муслимански и православни) и неки богатији сељаци из козјачких села. То су били углавном ситни трговци, препродавци *(„самсари“)*. Други су били странци, пре ратова 1876—78 највише из Бугарске, а по тим ратовима, из Тракије. Звали су се *џелепи*. Они су стоку куновали и директно од сељака на тргу или на селима, а исто тако и од самсара, било у Куманову, било по селима. Домаћих трговаца-џелепа није било. Има примера само да се ступало у ортаклук са тим великим сточним трговцима са стране[43]). Добрим делом је стока са кумановског трга извожена у Скопље и Солун[44]), али је све до краја турске владавине њен извоз највећим делом ишао на исток, прво у Бугарску, доцније у Тракију[45]). Од балканског рата извоз стоке са кумановског трга на исток је престао и био упућен готово једино на Скопље и Солун. Но и поред свега тога Куманово је и даље сачувало свој глас чувеног сточног трга и на њега је и даље догоњена стока са тргова суседних, па чак и нешто удаљених градова[46]). По статистици Трговачког удружења, у Куманову је пред сам последњи рат било 18 трговаца, који су имали протоколисану радњу за трговину стоком.

Куманово је и *трг жита*. Само, како се то жито не извози тако јако као стока, јер велики део остаје у околини, купујући га планинска села, то трговина житом у Куманову није на гласу као трговина стоком. Жито на кумановски трг долази највише из равничног дела његове околине, затим са северног дела Овчег Поља, а добрим делом из прешевско-бујановачке области. Било је и извозника жита. И ова је трговина за турске владавине била већином у рукама странаца: Грка, Јевреја и скадарских Албанаца католика. Жито се извозило у Солун. Поред неколико већих житарских радњи било је и много лица која су се бавила житарском трговином, само су она куповала за рачун ових, тј. „самса-

---

[40]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, књ. II, с. 91.

[41]) *Тодор Ђорђевић*, Кратово. Прилози познавању наших градова. Посебна издања Географског друштва, св. 11, с. 32.

[42]) *А. Урошевић*, Гњилане. Гласник Географског друштва, св. 17, с. 47.

[43]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, I, с. 79.

[44]) *К. Н. Костић*, нав. дело, с. 24.

[45]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, с. 79.

[46]) *Мил. Савић*, Наша индустрија, занати, трговина и пољопривреда, књ. VII. Сарајево 1929, с. 138—139.

рила“ за њих. Пред други светски рат је у Куманову било 16 протоколисаних житарских трговина.

Упоредо са сточном и житарском трговином развијала се и остала трговина, на првом месту *угоститељска*. Најстарије ханџије и механџије из новије прошлости Куманова, из прве половине прошлога века, били су *Грци из Јањине*, од којих су данас заостали неки родови. И све до грађења државних путева седамдесетих година ханџије, механџије, трговци и пекари били су ти Грци из Јањине. „Управљали су Турци и Грци“, како народ вели, чиме се хоће да каже да су, поред Турака, и Грци, преко своје економске моћи, имали власт у рукама.

Са грађењем друмова у седмој деценији прошлога века, који су се укрштали у Куманову и давали му бољу перспективу будућности, у њему се и поред даљих долажења јањинских Грка, појављују *Башиноселци*, чувени подузетници у механџиској привреди, и постепено освајају кумановску чаршију. Привреда Башиноселаца у Куманову је почела са механџилуком. Виногради у околини Куманова су слаби и нису задовољавали потребе кумановског тржишта у вину и ракији, те се пиће доносило са стране. Изгледа да су се грчке механџије у Куманову пићем снабдевали из Скопља, јер прво снабдевање Куманова од стране Башиноселаца вином и ракијом из њиховог села и од Велеса уопште, пада око 1855—60, тј. на двадесетак година пре рата 1877—78. Пиће су преносили на магарцима, а продавали га грчким механџијама. Долазили су у среду за пазарни дан, који је бию у четвртак, као и сада, у четвртак остајали у Куманову и на пазару куповали коже, вуну, пасуљ, живину, и др. и у петак се са тим артиклима враћали натраг. Међу таквим првим снабдевачима Куманова алкохолним пићима из Башиног Села били су Башиноселци *Коце Џимревски*, *Давче Пешов* и *Косте Гарев*. Прво су Башиноселци кириџијали са по једним магарцем, ускоро, после добре зараде, са по два, па три и више магараца, да је средом за Куманово из Башиног Села полазио читав караван магараца. За неко време снабдевали тако Грке, и лети и зими, а потом сами узели под најам по један дућанчић („пешкун“) за механу. Али су и даље продужили по старом. У радњама би или остављали кога од својих или би их затварали, а они би и даље петком одлазили у Башино Село, а средом се враћали са пићем, које би махом све распродали, јер је и шира околина Куманова, па и цела његова тржишна област оскудевала у вину и ракији од грожђа.

Двадесетак година по почетку башиноселске трговине вином и ракијом на кумановском тргу појављује се у Куманову „шпиртоваџа“. Неки солунски *Јеврејин Јаков* у орта-

клуку са *Ђошом Голистојановским* и још неким из Велеса доносио је шпиритус из Солуна и ту га прерађивао с водом. Како је ова „шпиртовача“ била јевтинија од праве ракије у велешком крају, почели су је Башиноселци куповати од њега, па поред праве ракије продавали и њу. Онда су узели и веће радње, па су чак постали и гросисти у трговини с пићем, а неки уз свој механџилук продавали и понешто од колонијалне робе, да неки од њих, као *Пешов* и *Бано Цимревски,* напуштају механџилук и доспевају до *бакала гросиста.* Они су као и остали трговци колонијалном и манифактурном робом за турске владавине, од којих су неки у Куманову још из прве половине прошлога века (као цинцарски род *Нерандза)* водили трговину најпре са Солуном, а од подизања вардарске пруге (1873) све више са Скопљем. Главне манифактурне радње биле су концентрисане у *Безистену,* који је подигао *Бари бег Кратовац.* На броју их је било 26 и највише у рукама крушевских Цинцара и скадарских Албанаца католика. Конкуренцијом од стране нових кумановских трговаца такве врсте странци су се исељавали и Безистен почео бивати напуштан, тако да су у првој деценији овога века све манифактурне радње већ биле ван њега, у чаршији[47]). Трговачке радње колонијалном и манифактурном робом су у новије време не само снабедвали град и околину, већ су се робом из њих снабдевале и трговачке радње у Прешеву, Кратову и Кривој Паланци.

Према статистикама Трговачког и Угоститељског удружења пред последњи светски рат у Куманову је била 481 трговачка и 451 угоститељска радња[48]).

Нагли развитак Куманова у врло живо трговачко место није давао да се упоредо са развојем трговине развијају и *занати* у њему. Кроз целу другу половину прошлога века неких занатлија или није било уопште у Куманову или је производ њихових радњи био слаб према великој потражњи на кумановском тргу. А потражња је била велика, јер се ту на пазару скупљало много света и то још од средине про-

---

[47]) *Јов. Х. Васиљевић,* нав. дело, с. 54 и 81.

[48]) Од *трговачких радњи* је по браншама било: бакала 212, пиљара 65, манифактуриста 55, галантериста 31, трговина сировим кожама 10. трговина прерађеним кожама 7, житара 16, трговина прозорским стаклом 18 железарија 13, брашнара 11, ситничара 9, трговина грађ. материјала 5, бижутерија 5, књижара 4, продавница велосипеда 4, продавница фото-материјала 3, трговина стакларија и посуђа 3, продавница шиваћих машина 3, продавница електро-материјала 2, продавница креча 2, продавница рибе 2 и комисиона радња 1.

Од *угоститељских радњи* је било: хотела са гостионицама 5, гостионица 5, кафана 7, крчама-механа 55, ханова 20, кафе-чајџиница 16, народних кухиња и ћевабџиница 23 и млекарница 10

шлога века, ако не и од раније. Још 1858 *Хан* бележи да је у Куманову »*der ausgezeichnete Bazar*«. На том таквом тадашњем одличном пазару, као и на нешто друкчијем, који је могао бити све већи и бољи, продавала се и разна занатска роба. Како се у Куманову није производило толико занатске робе и како неких заната уопште није било, то се на кумановски трг задуго, до рата 1877—78, доносили занатски производи из суседних градова Скопља, Велеса, Штипа, Кратова и Врања. Готови хаљеци, мушки и женски, доношени су из Скопља, Велеса и Штипа. Хаљетке су куповали углавном муслимани, Турци из вароши и мушке и женске, а Арбанаси са села само женске. Кожне хаљетке ћурчиске производње за македонско становништво до средине прошлога века, док се нису неки од ћурчија настанили у Куманову, доносиле су занатлије из Велеса. Кожна обућа је доношена из Скопља, Врања и Кратова. Кратовци су ту доносили и своје мутавџиске производе. Исти је случај био и са ужарским производима, које су до 1877 доношени из Врања и са кујунџиским производима, које су доносили занатлије из Скопља и Велеса итд.[49]). Велешанци су доносили и грнчарију и то све до балканског рата, када је досељавањем Пироћанаца тај занат ојачао, јер је међу досељеним Пироћанцима било и доста грнчара, те су од тада Велешанци доносили само луксузнију робу те врсте. Грнчарија је у турско доба доношена из Биљаче, а ужарију по ослобођењу Врања 1878 доносили су ужари из Бујановца.

Доношењем робе у Куманово тако само за пазарне дане, многе су се занатлије почеле и настањивати у Куманову. Као *први пекари* још пре стотину и више година били су неки Грци из Јањине, а потом, око средине прошлога века, као пекари су досељени Спахијини из Мургаша. За њима су доцније поред механџиске радње отворили и пекарску радњу Гареви из Башиног Села. У најстарије занате се убрајају још *ћурчиски, терзиски, бојаџиски* и *самарџијски* занат. За ћурчиски занат се на пр. зна да су га донели Велешанци и то још око 1830 год. Терзиски занат су пренели Власи из Крушева и Македонци из Велеса. У терзије су тад спадали и везачи срмом тзв. „срмакеши", који су срмом или свилом („бикме") везли и турска и хришћанска мушка одела. Тај је занат доцније слабио и Власи га затим напустили. Једини који је око 1880 тај занат обављао био је Велешанац Димко Мишевски-Грбе. *Кујунџиски занат* је такође пренет из Велеса и Крушева. Први кујунџија из Куманова био је Кумановац Хаџи Стојилко Деспотовски, који је тај знаат научио

[49]) Види о томе: *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, с. 63, 72, 73, 76 и 80 и *Тодор Ђорђевић*, нав. дело, с. 33.

у Велесу и који је око 1830 отворио прву кујунџиску радњу. За њим се међу старијим кујунџијама помињу Влах Алекса из Крушева и после 1870 Влах Ташков, такође из Крушева. Чак је и 1909 у Куманову само један Кумановац био кујунџија; све друге радње (8—10) биле су у рукама Влаха и других досељеника. *Обућарски занат* је пренет из Врања. Само је тај занат започет доста доцкан, тек 1872. Те године је прву обућарску радњу отворио Кумановац Илија Поповски, доцнији поп Илија, који је тај занат научио код Ристе Дошљака у Врању, а одмах за њим се као обућар преселио из Врања тај његов поменути мајстор, а после две године (1874) и Врањанац Коста Цепоус. По ослобођењу Врања, са пресељавањем његових муслимана у Куманово, тај се занат појачао, јер је међу досељеним врањанским мухаџирима било



Занатски дом у Куманову

доста обућара. Само је тај занат у Куманову све до 1890 год. уствари био папуџиски. Отада се он преобраћа у обућарски („кондураџиски") занат, јер су главну обућу кумановског становништва раније чинили опанци. И *абаџиски занат* у Куманову потиче из доба када и кондураџиски. Први абаџија је у то доба био Кумановац Дедо Пендиљ, само се не зна где је тај занат научио. Још млађи је *казаџинско-калајџиски занат*. Њега су после 1880 год. пренели Власи из Крушева (Измер, Пуревски и др.[50]).

[50]) Поред мојих података о изнетом развоју заната у Куманову послужио сам се и подацима из навођеног дела Јов. Х. Васиљевића, с. 71—75.

Поред наведених, у Куманову је било и има и разних других заната. Само нам овде није намера да изложимо постанак свих заната, већ да истакнемо како су се, зашто и из којих градова занати преносили у Куманово. Крајем турске владавине и доцније, све до 1925 год. у Куманову је постојао чак и *креварски занат*. Њим су се бавиле три јеврејске куће које су се биле преселиле из Скопља. По статистици Занатског удружења, у Куманову је 1947 год. било 56 разних заната са 698 радњи[51]).

Колико је занатство у Куманову било јако и напредно види се и по Занатском Дому, који је до последњег рата био највећа и најлепша зграда у Куманову.

Укупно је, дакле, у Куманову било 1330 трговачких, угоститељских и занатских радњи. Број радњи је нарастао толико, захваљујући раније истакнутој великој тржишној области Куманова. Поред стоке која је ту догоњена на пазар и из места ван кумановске околине, затим жита које је такође доношено и из суседних срезова, на кумановски трг су довожени дрво, ћумур и дрводелски производи (држаље, лопате, виле и др.), нарочито из карадачких села, чак и са гњиланског дела Карадака. Из гњиланског Карадака, односно из летничке католичке жупе, на кумановском тргу су одличну прођу налазили и коларски производи, нарочито точкови за волујска кола.

Исто као и ови поменути произвођачи, који су своје производе доносили на кумановски трг само у пазарне дане, тако су и оне поменуте занатлије из суседних градова, док у Куманову још није било или док још није било довољно занатских радњи, своје производе доносили само за пазарне дане. Пошто су имали више путовати, они су своје производе доносили уочи пазарног дана, у среду, у четвртак на пазарном дану их продавали, а петком би се враћали натраг у своја места (Скопље, Велес, Штип, Кратово) са непродатом

[51]) Бројно стање *занатских радњи* у Куманову, по занатима, 1947 године било је следеће: обућара 70, кројача 49 (за мушка одела 44, за женска 5), ковача 44, поткивача 40, ћурчија 38, берберо-фризера 30, пекара 29, бозаџија и оријенталских посластичара 28, столара 28, тенеџија 23, колара 21, терзија 19, посластичара и продаваца бонбона 18, калаџија 17, опанчара 16, штављача кожа 13, ужара 13, качара 12, мутавџија 12, машинских плетачица 12, леблебиџија 11, казанџија 10, месара 10, рогажара 10, абаџија 9, грнчара 9, самарџија 9, молера и фирмописаца 8, воденичара 7, зидара 6, електро-инсталатера 6, папучара 6, часовничара 6, фотографа 6, седлара 5, влачара 5, капара 5, кујунџија 4, содаџија 4, бојаџија 4, бравара 3, налунџија 3, пушкара 3, јорганџија 2, кречара 2, аутомеханичара 2, прецизних механичара 2, оправљача и изнајмљивача велосипеда 2, метлара 1, стаклорезаца 1, каменорезаца 1, везача 1, цревара 1, штмапара и књиговезаца 1 и циглара 1.

робом, да тако понове у наредној седмици, и лети и зими. Такву су трговину водили и неки трговци. Међу њима је било Јевреја из Скопља, који су доносили „нирнбершку" и другу ситну робу (исечена кожа за опанке, ремени, ножеви, звона за стоку и др.). До 1880 г. било је чак и таквих манифактуриста. То су били трговци који су живели и имали своје радње у Скопљу. Поред тих радњи у Скопљу, они су под закуп држали и радње у Куманову, нарочито у Безистену. Те су радње отварали само у пазарним данима, када би долазили у Куманово и попуњавали их робом, иначе би их сутрадан затварали и враћали се у Скопље. Пошто у Куманову није било мењача новца, то су кумановски трг посећивали мењачи из Скопља. Како је кумановски пазар редовно био добро посећиван, то су га последњих година турске владавине ти мењачи редовно посећивали сваке седмице. То су били Јевреји из Скопља. И они су долазили средом, а враћали се петком. Тако је Куманово у 19 веку, па чак и у његовој другој половини по оваквој трговини потсећало на *трговиште вашарског типа.*

У Куманову је све до последњег рата и кућна радиност била јако развијена, а нарочито *ткање сукна.* Тим су се ткањем бавиле жене сиромашких породица. Ткало се много, да су се израђеним сукном не само задовољавале потребе града и околине, већ се већи део извозио по Македонији и Косову. Вуну су те породице обично куповале од трговаца вунара или је добијале на кредит, а ови им после откупљивали израђено сукно.

У Куманову је добро заступљена и *пољопривреда* и кумановско становништво добрим делом живи и од пољопривреде. Како је Куманово добрим делом расло и од досељеника са села, то је пољопривреда у њему увек била добро заступљена, јер су они при пресељавању у град куповали земљу у градском хатару и бавили се земљорадњом. А земља је поред Куманова доста погодна за земљорадњу. Још *Евлија Челебија* у 17 веку каже да винограда и башта око овог града има у изобиљу[52]). Башта има и сада и било је и кроз цео 19 век, јер и *Ами Буе* 1838 год. каже да је Куманово опкољено врло добро гајеним и вештачки наводњаваним баштама[53]). Винограда међутим Куманово нема; грожђе се на кумановски трг доноси са села на подножју Карадага, из Скопља и Велеса, а тако исто и воће, које Куманово такође нема и које је добијало из села са подножја Карадага и од Криве Паланке.

---

[52]) Йорданъ Ивановъ, нав. дело, с. 220.
[53]) *Ami Boué,* нав. дело, с. 304.

Поред баштованства, којим се Кумановци баве и чије се баште и пружају поред Куманова са северне и источне стране дуж Липковске и Кумановске Реке, чији се производи носе и на трг у Прешево, кумановско становништво се бави и сејањем житарица, а исто тако и гајењем дувана и афиона. Кумановски дуван иде у другу врсту, а гаје га Турци и Арбанаси. Афион је међутим одличног квалитета. Њега гаје углавном Македонци.

Према попису од 1931 год. 31,1% кумановског становништва чине земљорадници. Они су по својој бројној јачини скоро једнаки највећој групи-занатлијској, која чини 33%[54]).

Са већим привредним развојем Куманова почела се у њему јављати и *индустрија*. Прва индустријска предузећа била су *шарлаганџинице*. Основане су још пре балканског рата, за турске владавине. Прва шарлаганџиница је била мала, са машином коју је окретао коњ. Била је својина Башиноселаца Џимревих, који су је подигли уз своју механску и бакалску радњу. После њих су ускоро Мишкови и Перкови, такође Башиноселци, подигли још по једну. Испрва се шарлаган у њима производио из афионског семена, после балканског рата — од сусама, а доцније од сунцокрета. Од 1946 год. су престале да раде.

Од 1912 до 1941 код садашње дуванске станице, у згради садашњег магацина за петролеј, радила је једна *качкаваљџиница*. Године 1926 подигнут је модеран *парни млин* и уз њега *електрична калорична централа*, а доцније још један млин. Од индустријских предузећа биле су подигнуте још *1 црепана* и 4 *циглане*. Постојала је и једна мала *пивара*, која је са почетком рата 1941 престала да ради.

После првог светског рата основане су и две новчане установе, једна 1922 (Кумановска трговачко-индустриска банка) и једна 1928 (Кумановска извозна и прометна банка), обе са по 2.000.000 динара основног капитала.

Таква је била привреда Куманова у његовој прошлости. Истицали смо да је нагло напредовање његове привреде дошло од његовог одличног положаја, који у привредном погледу окупља не само свој административни срез, већ и велике делове свих околних срезова, па добрим делом и њихове градове. Због неизмењених саобраћајних прилика перспектива будућности овог града је и сада добра. Државна трговачка предузећа се нагло развијају и број њихових радњи непрестано расте. Исти је случај и са трговачким за-

---

[54]) *Anton Melik*, O poklicni sestavi prebivalstva v mestih Jugoslavije. Geografski Vestnik (Ljubljana), letnik XII—XIII (1936—1937), c. 199.

другарским системом. Занатлије су највећим делом у приватном сектору, али их има и који су ушли у задругарски систем рада, тако да је 1947 постојала једна мутавџијска задруга. Поред тога постоје већ и градска предузећа за поједине врсте заната (месарски, пекарски, кројачни, обућарски и др.), а као највећа предузећа су Градска столарска радионица са око 60 радника и Кошуљарска задруга, највеће предузеће те врсте у Македонији, у којој је запослено преко стотину радница.

Може се слободно рећи да привреда Куманова има опет онај замах, који је од краја 18 века показивала непрекидно све до последњег рата. Подизањем железничке пруге према Овчем Пољу, чији се део до варошице Св. Николе има извести у 1950 години, Куманово ће у скорој будућности показати још већи привредни замах но што га је досад показивало, те ће оно и у будућности бити један од највећих и најважнијих привредних центара у Македонији.

IV СТАНОВНИШТВО

Најстарији помен Куманова, како видесмо у одељку о постанку и прошлости, потиче из 1660 године. По томе, што се ту код тог првога помена, у путопису Евлије Челебије, наводи џамија, а поред ње још и медреса и текија, види се да је ту било муслиманског становништва. Је ли поред муслимана било у граду и хришћана или још ког другог становништва, из Евлијиних бележака се не види, јер се у њима ништа не говори о кумановском становништву.

Да ли је међу тим Турцима било и њихових сродника Кумана, по којима је, како се мисли, Куманово добило своје име, не може се ништа казати, јер о томе нема ни писаних података нити пак каквог знања код турског и осталог становништва у Куманову. Највероватније је да су ти кумановски Турци у 17 веку били турски колонисти из Мале Азије, као и по другим градовима Балканског Полуострва. Чак је и у самој околини садашњег Куманова било доста Турака. Турска оаза у Македонији изгледа да се тада протезала и северније од садашње њихове оазе на Овчем Пољу, па захватала и кумановски крај. На то указује не само факат да су неки садашњи или доскорашњи прави турски родови досељавани у Куманово из неких села у околини, већ и то да у 19 веку нека македонска села, поред тога што су имала словенска имена, у турској администрацији имала турске називе, који су и данас у приватној употреби код кумановских Турака (Пројевце — *Баракли*, Скачковце — *Али Факилли*,

Клечовце — *Чауш Ћој,* Шупљи Камен — *Асилли).* Назив села Којнара, које се турски звало и *Бектешли,* као да указује да је у њему живело турско становиштво из Коније. А као да је међу Турцима овога краја било и турске етничке групе Јурука, јер је код Клечовца забележен топографски назив Јуручки Гробишта[55]).

У почетку и на крају 18 века Куманово се, како видесмо у одељку о његовој прошлости, помиње у путописима дубровачких посланика, али се, на жалост, ништа не говори о његовом становништву ни о његовој величини уопште. Нагласили смо да је оно на прелазу 18 у 19 век било незнатна варошица. Мора да је и оно, као и многи други наши градови, опало и уназађено после оних кратковремених аустријских продирања на Балканско Полуострво у току ратовања Аустрије са Турском 1689 и 1737 године. Од старих турских родова је остао мален број, па се чак један део тих родова и иселио по балканском рату.

Међу најстарије турске родове убраја се род *Оџак.* Само презиме му чак каже да је најстарији род, да је за остале родове, који су доцније досељавани, он важио као оџаклија, старинац. Некада је то био јак и разгранат род, али је у новије време изумро и сада спао на једну кућу. У чифлички посед је имао село Ржановце. — У исто тако стари род, који је у феуд имао село Бедиње, убрајали су се и Заими. По презимену се види да је то био спахијски род, да је, уз одговарајуће дужности, имао на уживању зијамет. Њихових потомака нема више, јер је род потпуно изумро. — *Хаџи Ибраим так'ми* (Хаџи Ибраимови) или *Џаџелер* такође се убрајају у старе и праве Турке. Називају се Шамлијама (Сиријанима) можда зато да би истакли своје турско порекло, везујући веру и нацију уједно, иначе ће бити из Мале Азије. — *Котлелер* су такође стари турски род, за који се не зна кад је и одакле досељен. Међу осталим старим турским родовима су *Мамутбегови,* чији су преци досељени из сада запустелог села Бислима на Пчињи. По њиховом дугом занимању сточарством изгледа да су потицали од етничке групе Јурука. Припадали су турском племству, јер су само они и изумрли род Ћефтелер имали у Куманову титулу бегова. — У старе турске родове, чији су се преци доселили из околине, спадају још *Џебелџи,* што значи брђани, који су се доселили из Асилли (Шупљи Камен) и род *Турк Хоџа,* чији се преци доселили из Чауш Ћоја (Клечовца).

По тим неуспелим аустриским походима крајем 17 и почетком 18 века настаје дубоко продирање Арбанаса у српске и македонске крајеве. Према Куманову су они још у току

---

[55]) *Јов. Х. Васиљевић,* нав. дело, с. 175.

18 века били допрли до планине Скопске Црне Горе, спустивши се и на њену источну падину. Можда је међу великим бројем исељених муслимана у Турску по балканском рату било и таквих родова пореклом из Албаније, досељених још у 18 веку. Но таквих нема међу садашњим муслиманским родовима. Најстарији међу њима броје око 120 година од досељења у град. То су *Спахилер,* досељени из Албаније преко кумановског села Матејче, *Дели Јашар,* преко Качаника, *Чоно,* преко прешевског села Лојана и *Маљоци,* преко Горње Мораве. За њима су, око 1860 године досељни и *Тенекеџилер,* преко кумановског села Никуштака[56]).

Године 1878 у Куманово је дошло доста избеглица („мауаџера") из ослобођених крајева Србије и из тада ослобођене Бугарске. Међу њима је било Турака, Арбанаса и Помака. Мухаџира Турака из Србије било је из Пирота, Беле Паланке, Ниша, Лесковца и Врања. Сматрали су се за Турке и говорили турским језиком. Од 80 кућа, колико их је дошло, сада их има око 30, јер су се по балканском рату исељавали у Турску. Арбанаса мухаџира највише је било из Масурице. Њих има и сад *(Бинаковци, Калабовци, Деветинци),* иако су се добрим делом и они иселили. Међу мухаџирима из Бугарске је поред Турака било и Помака. Сем две куће Турака, од којих је једна из Ловеча, а друга са Дели Ормана, њих нема више, јер су се иселили.

Поред Турака и Арбанаса у Куманову је последњих деценија турске владавине било и других муслимана. Било је наиме још и Татара и Черкеза. Татари су били са Крима, а Черкези досељени из своје постојбине са Кавказа. Черкези су дошли 1864 године, а Татари на неку годину пре њих. Татари су живели у самој вароши, у групи, тако да су чинили готово посебну махалу, јер их је било око 30 при доласку, а око 40 кућа при исељењу 1912 год. Од њих је сада заостала само једна кућа (Али Абдил). Черкеско насеље је, међутим било изван вароши, као посебно село, код садашње кумановске железничке станице. Једино су од њих две куће прешле у град, где и сада живе, док су се они из њиховог насеља код станице сви иселили још 1912 године.

Док се из првог помена Куманова у Евлијином путопису индиректно види да је у њему било муслиманског становништва, такав се закључак не може извести и за хришћанско становништво. Али аналогно са осталим нашим градовима у

[56]) Последњих година турске владавине у Куманову је било и неколико кућа католичких Арбанаса. Било их је из Скадра и Ђаковице. Сад су заостале само 3 куће (род *Лалес),* досељене из Ђаковице 1909 године.

то време, па и врло малим, као што је био Качаник, може се рећи да је тада и у Куманову било хришћанског становништва[57]). Међу садашњим становништвом има два македонска рода, за које се не зна да су од некуд досељени и који се зато убрајају у старинце. То су *Пузаљка* и *Чавдарци*. У старе родове спадају још *Гудуровци, Цаћеви* и *Шуманци*. За *Хаџи Стојиљковце*, који су такође један од најстаријих родова у Куманову, зна се да су досељени са Бабуне. Поред ових поменутих родова, који су бар крајем 18 века живели у Куманову, било је ту сигурно и других македонских родова, али не много, и од почетка 19 века, када се Куманово поново издиже до степена варошице, почиње се у њега досељавати македонско и друго хришћанско становништво. Биће да у другој половини 18 века због малобројних хришћанских домова Куманово није ни имало свога свештеника. Оно га добија тек почетком 19 века када се хришћанско становништво намножило у њему. Први свештеник у тој новијој историји Куманова био је парох суседног села Пројевца, поп Младен, који се преселио у Куманово, где остаје једини свештеник све до 1818, када му се за свештеника рукоположио и син Димитрије[58]). Његови потомци, названи Икономови, по овом поп Димитрију који је постао иконом (прота), расељавали се током времена, тако да их у Куманову нема више. У то време почетком 18 века, досељени су и Паламаревићи из Врања, чији су се потомци раселили у последње време.

У то време је, видесмо, Куманово улазило у област Хивзи паше скопског, која је, како смо раније навели, била врло напредна, јер је овај паша поклањао велику пажњу безбедности и трговини. Куманово је услед тога брзо напредовало, што је привлачило привредни свет, те је услед тога број хришћана у њему врло брзо растао. Оно је1805 г. имало већ свога учитеља, неког Гаврила Кратовца[59]).

У трећој деценији прошлога века се *Шољаци* и *Богданци* досељавају из села Матејче, а нешто доцније, око средине прошлога века још и *Спахијини* из села Мургаша и *Лопарци* из Прешева[60]).

У другој половини 19 века, пре рата 1877/78, досељени су *Бислимски* из сада пустог села Бислима, *Пуцкови* из села Сопота, *Чоробенски* из Липкова, *Левкови* из Четирца и др.

---

[57]) Види: *А. Урошевић*, Качаник. Гласник Скопског научног друштва, књ. XI, с. 189.

[58]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, с. 44 и 505.

[59]) *Јов. Х. Васиљевић*, Просветне и политичке прилике... Београд 1928, с. 74.

[60]) Поред ових родова било је и других, од којих су се неки раселили (*Путинци*), а неки изумрли (*Борозанови, Рикачовци, Ваџеви, Баба Девкини* и др.).

Међу тадашњим досељеницима било је и Врањанаца, од којих су сада само *Даштевци*.

После поменутог рата настаје јаче досељавање македонског становништва из околине, тако да само из Отље има око 50, из Нагоричина (Старог и Младог) око 120 кућа, а са по којом кућом има досељеника из готово свих кумановских села. Било је досељеника и из околних градова. Из Штипа су између рата 1877/78 и балканског рата досељени *Јосифови* и *Андонови* као манифактуристи и *Тасевски* као папуџије. А нешто пред балкански рат су из Велеса као слуге или ортаци у Башинюселаца дошли *Кусиђерци* и *Паневи*.

Од хришћанског становништва је, поред Македонаца било у Куманову, како видесмо и код привреде, још и Грка и Цинцара.

Грци су досељени још пре зидања садашње старе кумановске цркве 1851, јер су као кумановски грађани учествовали у пружању помоћи за њено зидање. Од тих Грка су сада заостали родови *Дувлис, Зурдумис* и *Кондокалис*. И ови, као и други, који су се временом иселили, досељени су из Јањине као ханџије, механџије и пекари. Последњи се међу њима иселили Гудоси у Скопље 1942 год.

Цинцари су пак досељавани из Крушева као трговци, механџије, занатлије, па је међу њима било чак и кириџија. Најстарији цинцарски род у Куманову је *Нерандза*, који је са још неким исељеним и изумрлим родовима дошао при крају друге половине прошлога века. Остали су се досељавали од спајања вардарске са моравском пругом (1888). Са пуштањем те пруге у саобраћај досељени су *Ђорђевски, Пуревски, Ицо* и *Ташкови*. После њих, пред крај прошлога века. досељени су *Барба, Измер* и *Тагазовски*, док су неки досељени чак по балканском рату, као *Николовски* и *Зисовски* 1920 и *Велковски* 1923 год.[61]).

Јевреја у Куманову сада нема, а што их је нешто било крајем турске владавине и мало по балканском рату, може се узети као неуспели покушаји да се настане у Куманову, Први насељени Јеврејин био је онај поменути Јака из Солуна, који је производио „шпиртовачу". После њега су дошле још неке три куће из Скопља, које су се бавиле цреварством, али се по балканском рату, неке 1915, а неке 1925, враћају у Скопље. — Код говора овде о Јеврејима у Куманову вреди забележити да су турске власти деведесетих година прошлога века сместиле у Куманову једну групу јеврејских породица протераних из Русије. Само се ти Јевреји нису дуго задржали; после пет-шест година су се отселили незнано куд.

---

[61]) Пред балкански рат било је око 10 кућа Грка и око 30 кућа Цинцара. Цинцари су имали румунску основну школу, која је радила око 30 година. Српске власти су је 1912 г. затвориле под изговором да не одговара хигијенским условима.

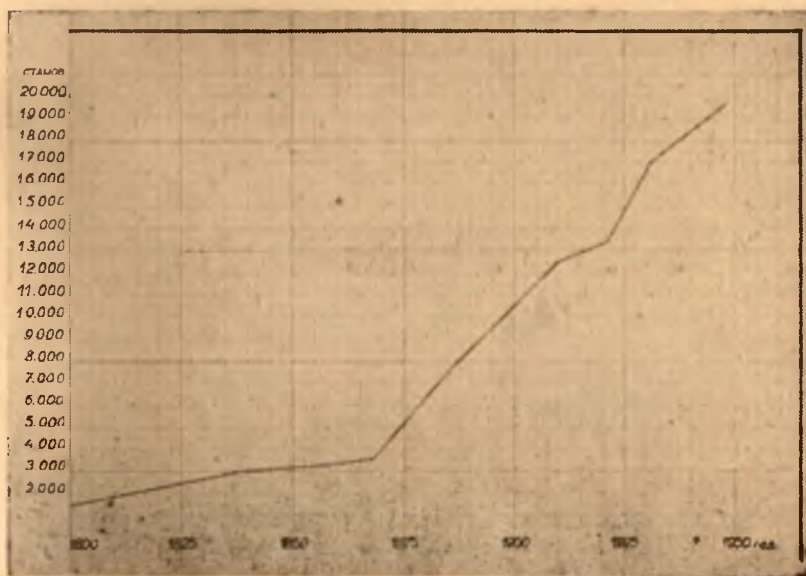
Цигана има око 200 кућа, од којих стотину кућа хришћанских и стотину муслиманских. Хришћански Цигани су досељени из околних села, где су били чифчије или момци. И сада су они највећим делом пољски радници, а неки од њих и свирачи. Било их је више, али су се многи још за турске владавине иселили у Скопље. Муслимански Цигани су такође досељавани из околине. Највећим делом су ковачи, чистачи, носачи, тестераши, а доскоро су неки од њих били и џамбази.

После балканског рата настаје исељавање Турака и Арбанаса у Турску и у периоду од балканског до другог светског рата иселило се око 500 муслиманских кућа. Али место да услед тог исељавања опада, Куманово је и даље, све до другог светског рата, показивало непрекидан прираштај, јер се, због његовог даљег и наглијег развитка, становништво досељавало и из околних и из удаљенијих крајева.

Поред осталих досељеника овога доба ту спадају и све башиноселске породице, јер су они помињати привредници из Башиног Села, који су у Куманово почели да долазе још седамдесетих година прошлога века, све до балканског рата живели у Куманову као прави печалбари, без породица. Своје породице нису доводили из Башиног Села да би им оне тамо обрађивале винограде, те да би што мање куповали туђе вино и ракију, већ продавали своја пића и тиме имали боље приходе у свом механџилуку. И козна да ли би и по балканском рату преселили породице да им у селу 1912—1914 године винограде није уништила филоксера. Оставши им онда породице без посла, пошто су се бавиле углавном виноградарством, Башиноселци у Куманову купују или подижу куће и пресељавају своје чланове. Тад су купили и дућане, јер су дотле, као „гурбетчије" радили у туђим дућанима, под кирију. Тада су, дакле, између балканског и првог светског рата досељени сви родови из Башиног Села. То су: *Џимревски, Пешови, Гареви, Шаћирови, Манушови, Андонови, Чушкари, Барјактари, Толеви, Мишкови, Дудићи, Давовски, Атанасовци, Диманини, Табаци, Калеје, Сливови*. Таквих печелбара без породица било је и из Рудника и Новачана (такође из велешке околине), па су и они из истих разлога довели своје породице. Из Рудника су тада досељени *Наумчевски*, а из Новачана *Пачковци* и *Петровски*[62]).

[62]) Печалбара без породица било је нешто у Куманову и чак 1947 године. То су били бозаџије, леблебиџије, посластичари и ашчије. Укупно су држали 18 радњи. Сопственици су им били: из призренске Горе 3, из Галичника 5, из тетовских села Јеловљана 6, Новог Села 3 и Урвича 1.

Поменутим исељавањем муслимана у Турску по балканском рату број муслиманског живља у Куманову је опадао, али ипак не много, јер се у накнаду за исељене, привучени привредним развојем Куманова, досељавали муслимански Арбанаси из арбанашких села са Карадага и његовог подножја. Опадање је уствари привидно, јер број муслиманског живља од балканског рата наовамо није у оној сразмери, према осталом становништву, у којој је био пре тога рата. Од балканског рата па до другог светског рата македонско становништво се доселило у доста великом броју, а поред њега је дошло и доста српског становништва из Србије, нарочито из Пирота и Врања. До рата 1877/78 у Куманову је већина била муслиманска, а на прелазу 19 у 20



Пораст броја становника у Куманову од почетка 19 века.

век већину чине хришћани[63]). Отада су муслимани непрестано у мањини. По државном попису од 1921 године према пријављеном матерњем језику је од муслимана (без муслиманских Цигана) турски језик пријавило 2917, а арбанашки 641 лице[64]), што према укупном броју тадашњег становништва у Куманову (14.300), у процентима износи: 21,8 за турски, а

[63]) В. Кѫнчовъ Македония, София 1900, с. 215.

[64]) Дефинитивни резултати пописа становништва од 31 јануара 1921 године. Издање Опште државне статистике. Сарајево 1932, с. 100.

4,8 за арбанашки језик. Исељавањем Турака и потурчених Арбанаса у Турску и досељавањем Арбанаса из карадачких и других села тај се однос изменио у корист Арбанаса. Ту има и чињенице да се један број потурчених Арбанаса, због буђења албанске националне свести, враћа својој националности. Број деце у турској и арбанашкој школи је 1947 године био скоро подједнак.

Како је Куманово расло у погледу броја становника од почетка 19 века приказује нам дијаграм у овом одељку. Како старији подаци пружају бројеве кућа, односно домаћинстава, а новији — бројеве становника, то су, за израду тог дијаграма, бројеви кућа из старијих података, рачунајући просечно по 5 становника на кућу, преобраћени у бројеве становника.

Што се тиче *културног стања* кумановског становништва, може се рећи да је оно до грађења моравске пруге, односно до краја претпоследње деценије прошлога века доста заостајало иза суседних градова. Куманово је било ново место, са много сељачког и полусељачког становништва, јер је највећи прилив становништва долазио са села. Па и доцније, све до балканског и првог светског рата, старих градских или досељених градских породица је било мало према броју тих сељачких и полусељачких породица. На градски живот је све до рата 1877—78 вршило утицај Врање, једно, преко досељеника из Врања, друго, што су Кумановци изучавали занате у Врању, што се види и из тога што се женскиње у Куманову до тога времена и нешто доцније носило „а ла турка" као и у Врању пре његовог ослобођења од Турака. По том рату, када се Врање одваја од Турске, почиње утицај из Велеса, односно из Башиног Села. Ово велешко село је и тада живело градским животом. Ношња жена и девојака из Башиног Села, је, када би оне долазиле у посету својима у Куманово, који су, како смо видели, све до балканског рата живели без породица, служиле као узор и, угледајући се на њих, кумановско женскиње је са старе градске ношње „а ла турка" или директно са сељачке ношње прелазило на нову градску ношњу европског стила.

Муслимански градски живот је до рата 1877—78 такође изостајао иза таквог живота у суседним градовима, јер је и муслиманско становништво у Куманову исто тако највећим делом било сељачко. Тек су мухаџири из Врања, Лесковца и других градова Србије подигли градски живот на нешто виши степен. Многи од њих су постали државни службеници у свом новом месту, јер су били добро писмени, док је писменост код кумановских муслимана дотле стајала врло

слабо, те су им раније за службенике долазили људи махом из других места. Мухаџири су донели и богатију и разноврснију кујну, а до њиховог доласка се кујна кумановских муслимана слабо разликовала од кујне суседних муслиманских села.

V ТОПОГРАФСКИ РАЗВИТАК

Забележено је предање да је Куманово постало расељавањем Куманичева, које је, опет по том предању, пре турског освојења постојало за десетак километара источно од садашњег града, у јужном делу хатара села Младог Нагоричина[65]). Као што се у одељку о постанку и прошлости нисмо



упуштали у то да ли је име Куманова дошло од Кумана или не, тако ћемо поступити и овде, тим пре, што, сем тог предања, нема никаквих других доказа за то. Најстарији помен Куманова је, како смо већ износили, помен који нам пружа Евлија Челебија, а по Старој Џамији, затим по поменутом гробу Хаџи Османа бин Сулејмана из Евлијиног доба и по

[65]) *Јов. Х. Васиљевић*, Јужна Стара Србија I, Кумановска Област. Београд 1909, с. 19, 42, 43.

старом порушеном хамаму у близини џамије види се да је тадашње Куманово било на садашњем месту.

То Куманово из 17 века, које је, по Евлији, имало 600 кућа, протезало се у северном делу садашњег града, око Старе Џамије, где је била и чаршија, јер Евлија каже да је џамија у чаршији[66]). Хришћани су, како смо у претходом одељку претпоставили да их је било, живели свакако у одвојеној махали, садашњој Варош Махали, око садашње старе цркве. Евлија не помиње цркву, али се из наредбе султана Махмуда II из 1234, односно 1818 наше ере, која је издана поводом молбе кумановског становништва, види да је ту постојала стара црква св. Николе, коју је требало обновити[67]). И на натпису изнад црквених врата из 1851 године, када је по добиеној дозволи црква подигнута, стоји да је она изнова сазидана на ранијем истоименом храму („ново созидасѧ сїѧ црквь на прежде нареченый храмъ еѧ иже во стыхъ оца нашего Николаа“).

Са опадањем броја кумановског становништва у 18 веку биће да је Куманово и топографски смањено, само ће бити да је ту углавном смањен хришћански део, јер је по народном знању забележено да је око средине 18 века хришћанских кућа било само неколико, а турских много више[68]). Између муслиманског и хришћанског дела изгледа да је било доста празног простора.

Као административно место у напредној Хивзи пашиној области Куманово у почетку 19 века показује приличан напредак, па из тих разлога настаје досељавање у ово поново оживело привредно место. Муслимани су попуњавали и проширивали већ постојеће *Џами Махалу* и *Орта Бунар Махалу* и подигли *Махмуд бегову* и *Бедињску Махалу*, а хришћани се насељавали само око садашње старе цркве, у *Варош Махали*. Око 1840 године Куманово се протезало само дуж Ваде и поред садашње старе цркве, и то опет не једноставно, већ са извесним празним међупросторима.

Између 1840 и 1870 године попуњавају се празни међупростори, али се Куманово и топографски шири. Варош Махала се проширује према југоистоку све до простора између садашњег Нагоричког и Пројевског Сокака. Наслањајући се на њу, у близини садашње нове цркве постала је тада *Карапска Махала*, названа тако по њеним оснивачима из села Карабичана. У близини Карапске Махале, на простору око садашње нове цркве, живели су муслимански Цигани.

---

[66]) Йорданъ Ивановъ, нав. дело, с. 220.

[67]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, с. 46. Ту се вели да је била укопана у земљу за девет степеница.

[68]) На истом месту, с. 43.

После 1870 године Куманово напредује нагло у сваком погледу, па самим тим оно од тога времена и топографски непрестано расте. Као продужетак Орта Бунар Махале и садашње Пиротске Махале настала је *Татар Махала* од колонизованих кримских Татара. Између Ендек Махале и Орта Бунар Махале 1878 су насељени мухаџири из Србије и Бугарске и тај насељени део је прозван *Муаџер Мало.* Због великог броја досељеника у то време испуњују се празни међупростори у граду, а истовремено се проширују и стари делови. До 1884 године Карапска Махала се продужује до средине Пројевског Сокака, Нагорички Сокак се продужује до млина, а Велешки Сокак једва да је ишао за десетак кућа навише од Тумбе и с једне и с друге стране. *Велешки Сокак*



„Велешки Сокак" у Куманову

или како се због своје величине зове још и *Велешко Мало* настао је између 1884 и 1912 године[69]). Од 1912 до 1930 године Куманово је нарасло дуж пута за железничку станицу, где су се махом населили Пироћанци, због чега је тај део и

[69]) Како се Куманово од 1870 г. топографски нагло ширило, нарочило навише, према југу, показује следећи пример. Када су власти 1868 забраниле хришћанима да се сахрањују у црквеној порти, они преместе гробље код садашње централне основне школе у Велешком Сокаку. Кад је почетком овог века град допро до гробља, онда га они преместе под брдо, код садашње „Соколане". А када је 1914 град допро и дотле, гробље је премештено даље, ка селу Биљановцу.

прозван *Пиротска Махала*. Тад су се попуњавали и извесни празни простори у граду, као напр. између Варош Махале и Ваде поред улице, којом води пут за Врање и Криву Паланку, где су дотле биле баште за поврће.

VI ТИП

Куманово 17 века са џамијом, текијом, медресом, ханом и хамамом, како га *Евлија* помиње, било је, нема сумње, паланка турско-источњачког типа. Али са опадањем његовим у 18 веку оно је све више личило на село. И по свом извесном напретку у почетку 19 века оно није много отскакало од изгледа једног већег села. Године 1838 улице су му биле некалдрмисане, лети пуне прашине (зими свакако пуне блата), а дворишта према улицама ограђена оградама које су биле облепљене лепом од блата и сламе[70]). Доцније, по свом извесном напретку и у погледу привреде и у погледу броја становништва, нарочито после седамдесетих година прошлога века, када га саобраћајне линије не обилазе, већ се новоподигнути државни друмови укрштају у њему, Куманово има већ изглед вароши у унутрашњости Турске. У њему је чак и 1886 г. чаршија са ћепенцима и тезгама; куће ниске и у споредним улицама увучене у дворишта ограђена зидом према улицама; улице уске и криве, само ипак пространије него у старим турским градовима[71]), што се ово последње свакако односи на новије делове града. У то је време још било празних простора између појединих делова, само су ти делови, како *Ст. Новаковић* наводи, били обрађени као баште, које су биле добро наводњене, слично оном делу између Варош Махале и Ваде поред улице кроз коју води друм за Врање и Криву Паланку, за који у претходном одељку видесмо да је био под баштама све до балканског рата.

Куманово је, дакле, у доба пред спајање вардарске са моравском пругом имало изглед једне новије паланке, али са доста старог, турско-источњачког типа, чак и са приличним изгледом села. Сами Кумановци који памте то доба, упоређујући га са садашњим његовим изгледом, зато што је у њему међу дворишним оградама било доста плотова, кажу да је било „како село“.

Са продуженим напретком, које је Куманово свестрано показивало после спајања вардарске са моравском пругом (1888), настаје и његово модернизовање у извесној мери. Само је оно већим делом било у приватној иницијативи и састојало се у подизању лепших кућа градског стила и у по-

---

[70]) *Ami Boué*, нав. дело, с. 304.
[71]) *Ст. Новаковић*, нав. дело, с. 15—16.

дизању бољих и пространијих дућана и магаза. Било је нешто и општинског рада. На две године пред спајање вардарске са моравском пругом претседник општине је причао Ст. Новаковићу да од касапница, кантара и других општинских дажбина кумановска општина има око 4000 дуката прихода, да се тај новац троши на градске потребе, на калдрму, и да се општина стара да однекуд доведе воду у град[72]). Вода је управо доведена тек 1893 из хатара села Бедиња, када је са седамнаест новосаграђених чесама увећан њихов број и потребе града у води прилично задовољене. Дотле се иначе три четвртине становништва водом снабдевало са извора којих је било у кориту Кумановске Реке. Са калдрмисањем је, међутим, ишло споро, јер су не само нови, већ и



Садашњи изглед једног дела „Тумбе" у Куманову

стари делови града били без калдрме. Калдрмисање је, дакле, ишло полако, и то од старих делова у турским махалама, тако да су нови делови калдрмисани пред балкански рат, од 1909 до 1912 године, и то не добро, јер су само средином улица постављене уске калдрме. Сточни Трг („Ајван Пазар"), који је био тада на главном тргу („Тумби"), по коме се зими једва ишло од блата, а на коме се налазила и општинска кућа („Беледија"), калдрмисан је у то време, пред балкански рат, и то после једне смешне сцене, коју је извео један тур-

[72]) На истом месту, с. 16.

ски официр, довевши војнике са ралом и воловима да заоре неискоришћено земљиште. Тада је калдрмисан и Нагорички Сокак, а истовремено реновиран и део чаршије који се протезао дуж њега, у коме су радње дотле биле ниске и врло неугледне.

Почетком овог века општинска власт је почела да обраћа пажњу и на чистоћу у граду. Касапима је забрањено клање стоке пред својим радњама у граду, већ су то морали да обављају на Кланици, коју је општина подигла изван града, преко Реке[73]). А и на неку годину пред балкански рат општина је извршила и делимичну канализацију. Канал је подземно спроведен од врха Велешког Сокака и преко Тумбе и Нагоричког Сокака одведен у Кумановску Реку; по бал-



Један део Ћурчиане у Куманову

канском рату је разгранат и споредним каналима. Пред балкански рат је спроведен и канал испод Пројевског Сокака, али мали, само за одвод воде од кише.

Последњих година турске владавине чаршија је била у центру града и захватала исте делове као и сада. На садашњем главном тргу, на „Тумби", био је, како видесмо, сточни трг („Ајван Пазар") за крупну стоку, а трг за ситну стоку (овце, козе и свиње) био је у Нагоричком Сокаку и по улазима у његове споредне улице. На Тумби се прода-

[73]) *Јов. Х. Васиљевић*, нав. дело, с. 54.

вало још и жито, а до 1912 било је и нешто радњи за продају воћа и поврћа. Изнад Тумбе, ка Ендеку, биле су касапнице, а иза њих ковачнице и нешто бакалских радњи. Источно од Тумбе пружале се папуџиске радње, а одмах иза њих је била Ћурчиана, у којој је био скуп ћурчијских радњи у једном неправилном четвороугаонику, који је имао улазе са две супротне стране. Преко пута Ћурчиане, око Нове Џамије, која је порушена у балканском рату, на чијем је месту после подигнута општинска кућа, садашња зграда Градског Народног Одбора, биле су абаџијске радње ,а ту је био и трг дрва („Одун Пазар"). У непосредној близини је био и онај у одељку о привреди помињати Безистен, такође у четвороугаонику као и Ћурчиана.



Стара градска кућа у Куманову (раније својина Ташкових)

Сад је сасвим друкчије. На самој Тумби нема ниједне радње, већ само око ње. Безистена такође нема. Једино Ћурчиана још стоји. И радње по еснафима нису више онако груписане као сто су донекле биле тада, већ разноврсно измешане.

Са досадашњим излагањем о типу Куманова и о његовом преображају и променама виделе су се донекле, бар индиректно, и преображаји и промене на кући у овом граду. Ипак ћемо мало и конкретно да прегледамо те промене на кући у Куманову.

Почетком 19 века, док је Куманово више личило на село но на град, и куће су у њему биле налик на сеоске, само су биле мање од њих. Састојале су се већином од два одељења, од „куће" и „одаје". Он средине прошлога века па до рата 1877—78, у који период спада онај нагли скок у свестраном напретку овога града, јавља се нешто лепша кућа варошке врсте по угледу на тадашње куће у Скопљу, само од слабог материјала, обично од дрва и даске. Обично је то била приземна кућа, али је било и кућа на кат, чак и код хришћана, само су и оне биле од слабог материјала и са спољним степеницама. Међу таквим малим и слабим кућама било је и великих и лепих кућа, па чак и од тврдог материјала, као што су били Махмуд бегов сарај, Мелећ бегови конаци, кућа



„Старо" и „ново" у Куманову

Цакића, кућа Мишевих и кућа иконома Димитрија. Приликом свог проласка кроз Куманово 1858 немачки конзул *Хан* је био отсео у овој последњој и назива је дивном кућом (»stattliches Haus«)[74].

Од тога рата 1877—78 у Куманову су се непрестано подизале боље куће, али то углавном у средишњим деловима; периферија је непрестано расла од нових досељеника са села, а ти се нови досељеници, као сиротиња, задовољавали малим кућама. Међу њима је покоја могла бити чак и под сламом,

[74]) *J. G. von Hahn,* нав. дело, с. 100.

као што су биле куће Јована Бесника у Горњој Махали, порушена 1882, и кућа Вукашина Деда Настовског, порушена крајем 19 века. Таквих је кућа у првој половини 19 века било много, па нам и та чињеница показује колико је Куманово уназађено у току 18 века, јер су у 17 веку куће у Куманову, по Евлији Челебији, биле ћерамидом покривене[75]).

Од балканског рата наовамо у Куманову је подигнуто много нових кућа, па не само у средишњим деловима него и у споредним улицама и периферним деловима. Судећи по црепу на крововима, који се почео употребљавати од балканског рата, у Куманову је свака друга кућа или нова или обновљена. Материјал је код нових кућа цигла, али поред ње се јавља и камен, обично нижи део куће је од камена, а виши од цигле. Цигла је у зиду обично слободно слагана, а има је и у бондруку.

Куманово је тако по кућама, којих има нових и у модерном стилу, као и по прилично реновираној чаршији нешто изменило свој изглед, иначе су линије улица остале онакве какве су су биле и за турске владавине. Регулациони план је по балканском рату постојао и куће се по њему зидале, само појединачна излажења на линију не дају утисак регулисане вароши. Али се за то време Куманово прилично уредило. Суходолица звана Ендек, која је за турске владавине пролазила кроз Куманово, па и кроз његову чаршију и која је била узрок многим болестима, јер се у њу бацало ђубре, каналисана је и регулисана. Општина је уз то подигла нову кланицу, сушницу кожа, магацин за запаљиве ствари, сточни трг, централну основну школу, два парка и басен за купање. Поред чаршије и извесних делова у центру града калдрмисан је и цео пут до железничке станице и то све коцком од нагоричког базалта. Од већих јавних зграда Куманово је добило Дуванску станицу, коју је подигла држава и Занатски дом, Фискултурни дом и Болницу, подигнуте приватном иницијативом (Болница је задужбина Николе Спасића).

Уређење Куманова продужују народне власти. Сада је по Народноослободилачком рату подигнута сточна амбуланта, нова гимназија, Дом за социјално осигурање и др. Калдрмишу се досад некалдрмисане или слабо калдрмисане улице на периферији.

У погледу етничког размештаја Куманово је за турске владавине имало два главна дела: муслимнаски и хришћан-

---

[75]) Материјал о кући у Куманову у току 19 века великим делом је узет из навођеног дела *Јов. Х. Васиљевића*, с. 40, 56, 58, 60 и 61.

ски. Муслимански су чиниле старе турске махале: Џами Махала, Орта Бунар Махала, Махмуд бегова и Ендек Махала; остали делови на истоку и југоистоку били су хришћански. Са исељавањем Турака и Арбанаса у Турску од балканског рата помешане су и поменуте старе турске махале, јер су се у њихове куће редовним путем (куповином) усељавале македонске породице. Тим истим путем је помешана и Мухаџирска Махала. Цигани живе на периферским деловима и то: православни у јужном крају града, у тзв. Амбар мали и код „Соколане", а муслимански Цигани поред реке на путу за Криву Паланку и нешто у Бедињској Махали.

Атанасие Урошевич

КУМАНОВО

(Вывод)

Хотя Куманово имеет отличное географическое положение, он не старый город. Согласно одному средневековому воспоминанию ошибочно до настоящего времени в науной литературе считалось что он развился от одного средневекового села того же имени. То средневековое воспоминание между тем не относится к современому городу Куманово но к одному селу такого имени в Косовско-метохийской области, которое теперь не существует. Современное Куманово, таким образом, и как город и как поселение в первый раз воспоминается в 1660 г. в путевых записках известного турецкого путешественника Эвлия Челеби.

Согласно титулу „король Куманова", который принял в 1689 г. вождь повстанцев северо-восточной части Македонии, Карпош, когда австрйцы в войне с турками достигли до Македонии, можно было бы сказать что Куманово был успевающий городок. После того и ещё одного неудачного австрийского похода на Балканы (1737) Куманово было в упадочном состоянии и только в 19 веке начало подниматься. Но и тогда, все до семидесятых годов, его развитие умеренно, потому что в близкой окрестности, в каких нибудь десяти километрах от него, некоторые села (Табановце, Нагоричино, Стрезовце и Клечовце) были сильные конкуренты в экономическом отношении. И в тех селах как и в Куманово пересекались пути, так что путешественники, купцы и караваны почти не имели надобности проходить через него или заходить в него. Только тогда когда в те семидесятые годы прошлого века проводилсь государственные дороги в Турции и когда в окрестностях Куманово за их пересечение взято только Куманово, конкурентные центры Куманова до того времени теряют экономическое значение, а Куманово деляет огромный скачок, еще беспрерывно держащийся, как это показывает и диаграмма строительства. Из такого незначительного городка с 300 домов в начале прошлого века Куманово теперь по числу жителей (20.000) четвертый город по порядку в Народной республике Македонии.

Во всяком случае по помянутым причинам экономической полицентричности путей сообщения в окрестностях Куманово, хотя и занимающее отличное положение, до 17 века Куманово не представляет городского

поселения. Ту роль в среднем веке имело Нагоричино, в котором достаточно старых церквей и церковок, и рядом с ним, может быть, еще какое нибудь соседнее село. На основании мест нахождения римских древностей можно бы было сказать, что и в старом веке в современной окрестности Куманова также существовали не один но больше малых экономических центров сразу.

В экономическом отношении Куманово имело очень интересное развитие. Через целый 18 век в Куманово не было достаточно ни ремесленных, ни купеческих лавок, а потребность в ремесленной и купеческой мануфактуре и в других материялах была большая, потому что по причине торговли здесь собирался большой базар. Недостаток в том материале дополняли единичые ремесленники и купци из соседних городов Скопя, Велеса, Штипа и Кратова. Приходили каждую неделю в базарный день и опять возвращалиь в свои места. Даже так в каждый базарный день прибывали из Скопя и разменщики денег. Куманово так сказать через весь 19 век было одной большой ярмаркой базарного типа. Только в начале 20 века он перестаёт, большей частью, снабжаться через купцов и ремесленников из соседних городов, потому что в нем уже было разнын нужных видов и в достаточном количестве и ремесленных и купеческих лавок и только с того времени он начал получать форму обычного города с утвержденной экономической жизнью. Единственно известные предприниматели из велешкого села Башиного села продолжили снабжение Куманова вином и ракией из своего села и своего края всё до балканской войны (1912); в конце концов и они перестали с тем, во первых, потому что хотели порвать с жизню тех, кто ходят на заработки, а такой жизню они прожили около полувека. Также постепенно они почти все открыли в Куманове известые лавки, особенно кабаки. Их семейства жили беспрерывно в Башином селе в годы между Балканской и Мировой войны. Кроме экономической деятельности со стороны греков из Янины в начале 19 века и позднее со стороны цинцаров из Крушево, самую большую экономическую деятельность в новое время в Куманово проявили и найбольшее влияние оказали на его экономическое развитие те македонские предприниматели из Башиного села.

В остальных частях этой работы даются данные о приращении и происхождении жителей с начала 19 века и то како за македонское так и за турецкое и албанское население, а затем излагаются и остальные данные нужные для одной монографии из урбанистической географии (топографическое развитие города и тип города).

ATANASIJE UROŠEVIĆ

KUMANOVO

(*Résumé*)

Malgré sa situation géographique très favorable, Kumanovo n'est pas une ville de longue date. Se fondant sur une inscription, on pensait jusqu'à présent que Kumanovo s'est développé d'un village de moyen âge du même nom. Cependant, cette inscription du moyen âge ne se rapporte pas à la ville actuelle de Kumanovo, mais à un village du même nom de Kossovo, village qui n'existe plus. La ville de Kumanovo, par conséquent, comme ville et comme habitation en général, est mentionnée pour la première fois en 1660 dans l'Itinéraire d'Evlia Tchelebi, le voyageur turc bien connu.

D'après le titre »roi de Kumanovo«, que le chef de l'insurrection de la Macédoine du nord-est, Karpoš, s'est attribué en 1689, alors que les

Autrichiens, dans la guerre contre les Turcs, sont venus jusqu'aux limites de la Macédoine, on pourrait penser que Kumanovo était un bourg en prospérité. Après cette campagne, suivie d'une autre campagne des Autrichiens dans la Péninsule Balkanique (1737), Kumanovo est tombé en décadence, pour ne pouvoir reprendre sa prospérité q'uau XIXe siècle. Même alors, jusqu'à 1870 environ, sa prospérité est moderée, puisqu'il avait dans son voisinage immédiat, éloignés à une dizaine de kilomètres, quelques villages (Tabanovce, Nagoričino, Strezovce et Klečovce) qui furent ses concurrents économiques. C'est dans ces villages, comme à Kumanovo, que les communications se croisaient de sorte que les voyageurs, les commerçant et les caravanes n'avaient même pas besoin d'y passer ou d'y descendre.

Vers 1870, alors qu'en Turquie on a construit les routes nationales et que Kumanovo est devenu le noeud de leur croisement, les centres de concurrence autour de Kumanovo ont perdu leur importance économique, tandis que Kumanovo a pris son grand essor, qui dure encore, ce qui montre le diagramme à la page 31. D'un bourg sans importanse de 300 maisons, au commencement du siècle passé, Kumanovo, par le nombre de sa population (20.000 h.), est devenu la quatrième ville dans la République populaire macédonienne.

Probablement à cause de l'existence de plusieurs centres économiques dans ses environs, qoique d'une situation très favorable, Kumanovo, avant le XVIIe siècle, ne se montre point comme habitation urbaine. Pendant le moyen âge, ce role a joué Nagoričino, dans lequel il y a assez d'églises et de sanctuaires et, probablement encore un autre village voisin. D'après les restes archéologiques romains, on purrait dire que dans l'antiquité, aux environs de Kumanovo il y avait à la fois plusieurs centres économiques.

Du point de vue économique, Kumanovvo a eu un développement intéressant. Durant tout le XIXe siècle, Kumanovo n'a pas eu suffisament de boutiques commerçantes et artisanes, alors que la consommation de la marchandise de toute sorte était tres grande, puisque c'était un marché important pour l'échange des produits. L'insuffisance des marchandises était comblée par les commerçants et les artisans venant des villes voisines: Skopje, Veles, Štip et Kratovo. Ils venaient chaque semaine pour le jour de marché et puis rendraient dans leur ville. Pour le jour de marché venaient même les changeurs de Skopie. Kumanovo, pendant tout le XIXe siècle était une importante ville de commerce du type forain. Au commencement du XXe siècle Kumanovo cesse de s'approvisionner par les commerçants et les artisans des villes voisines, car il possède déjá, et en nombre suffisant, les boutiques commerçantes et artisanes et c'est alors qu'il a reçu l'aspect d'une ville à vie économique stabilisée. Seuls les marchands ambulants de Bašino Selo, village près de Veles, ont continué à ravitailler Kumanovo de vin et d'eau de vie de leur village et de leur contrée. Cela a duré jusqu'à la guerre balkanique (1912), quand ils cessèrent de s'occuper de cette sorte de commerce parce que le philoxera a detruit les vignes de leur village et parce qu'ils ont voulu rompre avec cette vie instable qu'ils menèrent pendant un demi siècle. Qoiqu'ils aient eu des boutiques à Kumanovo, pour la plupart des auberges, leurs familles vivaient continuellement à Bašino Selo, ils ne les ramenèrent à Kumanovo qu'à la periode entre la guerre balkanique et la première guerre mondiale. Sauf l'activité économique et la part des Grecs de Janina du commencement du XIXe siècle et des Tzintzares de Kruševo plus tard, la plus grande activité économique à Kumanovo était deployée par les entrepreneurs macédoniens de Bašino Selo, qui parvinrent à exercer la plus grande influence sur son développement économique.

Dans les autres parties de cette étude on donne des renseignements sur l'augmentation et l'origine de la population à partir du commencement du XXe siècle d'origine macédonienne aussi bien que de celle d'origine turque et albanaise. A la fin, on donne des renseignements nécessaires pour une monographie de géographie urbaine (le développement topographique et le type de la ville).

МАРИН КАТАЛИНИЋ

ЈЕДНА РИЈЕТКА СНИМКА АЛФА-РАСПАДАЊА У ТОРИЈЕВУ НИЗУ

(Примљено 1 јула 1949 год.)

МАРИН КАТАЛИНИЋ

ЈЕДНА РИЈЕТКА СНИМКА АЛФА-РАСПАДАЊА У ТОРИЈЕВУ НИЗУ

(С 1 таблом)

Натопимо ли осјетљиви слој фотографске плоче специјалне врсти (за истраживање корпускуларних зрака) врло разријеђеном растопином соли једног радиоактивног елемента, па је чувамо у мраку неколико дана и онда развијемо, опажамо под микроскопом у њезину слоју стазе алфа честица као појединачне трагове или као вишекраке „звијезде“. То је позната метода истраживања, која по тачности заостаје за методом магле, али квалитативно има према њој неке предности. Ако се у времену од натапања до развијања плоче један атом радиоактивног елемента више пута распадне, стазе алфа зрака из њега и из његових алфа-сљедника излазе из исте тачке и чине звијезду.

Узмимо случај, да је осјетљиви слој био натопљен разријеђеном растопином једне торијеве соли. Како од радиоторија до ThD има 5 елемената, који избацују алфа честице, очекивати је, да ће се појавити звијезде са највише 5 тракова. То могу бити 5-краке звијезде с једним дугачким траком, који представља стазу алфа честице из ThC', или — нешто рјеђе — 5-краке звијезде без дугачког трака, ако је посљедња фаза распадања ишла огранком ThC — ThC''. Таквих звијезда заиста и налазимо, и ако не баш често[1]). Највише опажамо звијезда са 3 и са 4 трака.

Узмемо ли у обзир цијели торијев низ, могла би се очекивати и по која 6-крака звијезда. Да би таква звијезда настала, треба да један торијев атом у оно неколико дана од натапања до развијања пређе у $MsTh_1$, овај у $MsTh_2$, па у RdTh, и да овај радиоторијев атом доврши цијели споме-

---

[1]) Н. пр.: H. J. Taylor a. V. D. Dabholkar, *Proc. Indian. Acad. Sc.* (A) 3, 265, 1936.

нути процес распадања до ThD. С једне стране због спорог радиоактивног распадања самог торија, с друге стране због прилично дугог половичног времена, које има $MsTh_1$ (6,7 година), такав је догађај у тако кратком временском размаку врло мало вјеројатан.

Пред неколико година нашао сам — између неколико стотина прегледаних звијезда — једну такву 6-краку звијезду код истраживања плоча натопљених растопином торијева нитрата[2]). Према томе, она предочује алфа распадање једног торијева атома све до распадања његова посљедњег алфа-сљедника ThC'. Та је звијезда приказана у сл. 1 (табла I) у повећању 872 × (првобитно повећање: 800 ×). Присутност дугачке алфа-стазе, која припада елементу ThC', искључује алфа огранак ThC — ThC''. Ова звијезда показује још и ту особитост, да је алфа честица из ThC' морала бити алфа честица с аномалним досегом у уздуху $R_0 = 9{,}27$ cm[3]). Осим разлога, који долазе ниже, за ово говоре и резултати успоређивања дужине ове алфа-стазе са дужинама алфа-стаза ThC' у неким снимкама 5-краких звијезда, снимљених уз исто повећање, гдје је таква стаза била добро хоризонтална.

Употребљене су Афгине *K*-плоче с дебљином слоја 40 μ. Плоча је купана 30 минута у 2%-ној растопини торијева нитрата, па је након 4 дана развијена. — У плочама *K* не виде се трагови стаза бета честица.

Употребљен је кемијски чисти торијев нитрат. Старост му је могла износити 3 до 4 године. Према томе, он је морао садржавати још знатну множину првобитног RdTh, који је — због своје изотопности с торијем — код израђивања препарата био сталожен заједно с торијем. Означимо ли с N_0 почетни број атома тог RdTh, онда их је након 3 године преостало још 0,334 N_0, а након 4 године 0,232 N_0. К томе придолази RdTh, који се кроз то вријеме стварао из мезоторија. Овим и спорошћу распадања самог торија објашњава се чињеница, да је у плочама број појединачних кратких трагова, који би припадали торијевим алфа честицама, био размјерно мален у поредби с бројем звијезда из RdTh и његових сљедника. С друге стране, препарат је због своје релативне младости био још далеко од радиоактивне равнотеже с новим RdTh и његовим сљедницима. То и споменути, слабо познати остаци првобитног RdTh имају још неповољну страну, да отежавају просуђивање вјеројатности за појаву 6-краких звијезда према фреквенцији 5-краких звијезда.

---

[2]) У ствари, нађене су још двије такве звијезде. Код испитивања оне су одбачене, јер је било знакова, који су упућивали на то, да се ради о распадању двају атома RdTh или ThX, који су се случајно налазили један уз други.

[3]) Фреквенција $33{,}6 : 10^6$. Cf.: Geiger—Scheel, *Handb. d. Phys.*, XXII/1, 2. изд. (Берлин, 1933), стр. 302 (St. Meyer).

Стазе алфа честица у сл. 1 означујемо редним бројевима, почињући од најкраћег трага у смјеру гибања казаљке на ури. Координацију појединих стаза појединим алфа елементима торијева низа изводимо на тај начин, да једну дату стазу самовољно припишемо једном елементу, па из дужине те стазе и из досега алфа зрака тог елемента у уздуху нормалног тлака и собне температуре одредимо моћ кочења фотографске емулзије у поредби с уздухом. Онда помоћу тако одређене моћи кочења прерачунавамо дужине осталих стаза на њихове еквиваленте у уздуху нормалног тлака и исте температуре. Из добивених уздушних еквивалената покушавамо да поједину алфа стазу припишемо елементу, за који је досег алфа зрака у уздуху под наведеним околностима најближи датом еквиваленту. У самој је природи ове фотографске методе — због размака међу активираним и развијеним зрнцима сребра у емулзији — да ће тако одређени уздушни еквиваленти бити готово редовито краћи од досега истих алфа зрака у ваздуху[4]), као и то, да ће они показивати знатно расипање вриједности. Извјесно расипање вриједности долази код ове методе и одатле, што емулзија има другу моћ кочења, док је влажна, него ли кад је суха. Односно, средњи досег алфа зрака у емулзији други је за оне зраке, које су излетјеле првог дана, него за оне, које су излетјеле посљедњег дана. — Како се види из сл. 1, у *K*-плочама средња густоћа зрна (т. ј. број развијених зрнаца сребра на дужини једног микрона, или такођер: средњи размак међу развијеним зрнцима сребра) на различитим стазама колеба у доста широким границама.

Изведени су различити покушаји координације стаза, с различитим стазама као основним стазама („нормалама"). Једино добро слагање се постизава, кад се стаза бр. 6 припише алфа честици из торија A (ThA), па се она узме као нормала за успоређивање. Томе одговара моћ кочења 2050:1. У том случају прерачунавање показује, да најдуља стаза одговара алфа честици из ThC' само онда, ако се овој припише аномално велик досег у уздуху $R_0 = 9{,}27$ см. Резултати ове координације приказани су у таблици 1.

Микроскопско испитивање под повећањем 800 × показало је са свом могућом точношћу, да исходишта свих стаза леже у истом нивоу у дубини неких 10 μ под горњом површином желатина. Да би ова чињеница била што боље истакнута и у репродукцији, звијезда је снимљена у директном повећању 800 ×. Тим је нешто изгубљено у оштрини дијелова неких стаза, које леже више или мање положито према хоризонтали, осим стазе бр. 3, која је готово тачно хоризонтална. Кохеренција исходишта свих стаза у хоризонтал-

[4]) Види такођер: Taylor a. Dabholkar, l. c., стр. 269, таблица.

ној равнини испитана је на готовим снимкама у накнадном повећању на 2400 ×. Интерполирајући правце стаза по средини што више зрнаца, показује се, да стазе бр. 1 (Th), 2 (RdTh) и 5 (ThX) имају заједничко исходиште, које је удаљено 0,3 до 0,4 μ од заједничког исходишта осталих трију стаза. Овај се помак исходишта не да објаснити одбојним помацима атома код емисије првих трију алфа честица, јер је исходиште посљедњих трију алфа стаза помакнуто готово насупрот смјеру, којим би требао бити одбачен атом првим одбојним ударцима. Зато се тај помак има објаснити дифузијом атома уз претпоставку, да је између емисије алфа честице из RdX и емисије алфа честице из торона протекао одуљи временски размак. Обзиром на довољно дуго половично вријеме, које има ThX, такав је временски размак вјеројатан. Петерокраке звијезде у снимкама Taylora и Dabholkara показују битно веће дивергенције (3—4 μ) међу исходиштима појединих стаза, па и они нагињу тумачењу ове разлике дифузијом атома[5]).

Стаза бр. 1 силази стрмо у дубину под кутом 0 ~ 50°. У микроскопу она се наставља у дубини са још 1 до 2 зрнца; од ових се у репродукцији слабо назиру контуре првог зрнца. Уз горњу претпоставку, тј. уз идентифицирање стазе бр. 6 са стазом алфа честице из ThA као нормале, права дужина стазе бр. 1 добро одговара досегу R_1, торијеве алфа зраке.

Ако дужину стазе бр. 3 (25,8 μ) рачунамо до краја агломерата зрнаца, којим она завршава, онда њезин еквивалент излази нешто предугим према досегу R_{18} за торонову алфа честицу. Сматрамо ли у том агломерату посљедње зрнце, које и онако лежи изван опћег правца стазе, паразитом, онда се уздушни еквивалент преостале дужине стазе (25,0 μ) добро слаже са R_{18} за торон.

Ознаке у вертикалним ступцима таблице 1 имају ова значења: λ = дужина стазе алфа честице у фотографској емулзији (пројекција на хоризонталу) у микронима; L = израчунани еквивалент у уздуху нормалног тлака и температуре 18° C; R_{18} = досег алфа честица у уздуху нормалног тлака и температуре 18° C; T — половично вријеме. Досези R_{18} изведени су из досега R_0 према новијим Mayerовим подацима[6]). Редни број стазе дефиниран је као горе.

Кад се узме у обзир, да моћ кочења емулзије понешто расте с енергијом честице[7]), па кад се λ за стазу бр. 4 по-

---

[5]) Taylor a. Dabholkar, l. c., стр. 270—271.
[6]) St. Meyer, l. c. 3), стр. 302, 310, таблица 13.
[7]) D. H. Webb, Phys. Rev. (2) **74**, 511, 1948; Успехи физичс. наук 38, 77, 1949.

Таблица 1.

Моћ кочења: 2050 : 1

Редни број	λ (μ)	L (cm)	Напомена	Координација елементу	R_{18} (cm)	T
1	$>7,1$	$>1,46$	силази под кутом $\Theta \sim 50^0$ $\frac{L}{\cos\Theta} > 2,3$ cm	*Th*	2,66	$1,8.10^{10}$ a.
2	18,8	3,86		*RdTh*	4,06	1,90 a.
5	18,3	3,77		*ThX*	4,42	3,64 d.
3	25,8 (25,0)	5,32 (5,15)		*Tn* (*Th Em*)	5,12	54,5 sec
6	27,9	5,75	„*нормала*"	*ThA*	5,75	0,14 sec
4	46,7	9,61	аномални досег	*ThC'*	9,88	$\sim 10^{-9}$ sec

множи с тако повећаном моћи кочења, онда се уздушни еквивалент те стазе са L = 9,83 cm још боље приближава аномалном досегу R_{18} за ThC'.

Стазе, које су овдје приписане алфа честицама из торона и из ThA, одлазе у диаметрално супротним смјеровима. Могло би се радити о чистој случајности; али исти појав диаметралности запажен је у још три снимке 5-краких звијезда и у једној снимци 4-краке звијезде, и то опет на стазама, које по дужини долазе одмах послије дужине стазе алфа честице из ThC', а дужином се мало разликују између себе. По томе се чини, као да се не ради увијек о чистој случајности. Онда би требало тражити објашњење овог појава, гдје он није случајан, у карактеристици, да се ради о двама алфа-елементима, који слиједе један за другим, без посредства бета-елемента, а к томе други од њих је елеменат с врло кратким половичним временом. Чини се, да би се основа за тумачење могла наћи у претпоставци, да је у овим случајевима алфа честица из ново настале језгре ThA излетјела непосредно иза алфа честице из торона, док се ново настала језгра још налазила у узбуђеном стању прије емисије гама

кванта. Можда се ради о временском размаку 10^{-20} до 10^{-21} sec, док је торонова алфа честица још била у домашају језгре, тако да су обје алфа честице и остатак језгре још чиниле механички и електрички везани сустав. Даља претпоставка овом крупно приближном рачуну јест, да алфа честица постигне своју пуну почетну брзину, како ову обично дефинирамо и како она улази у Geigerову формулу о досегу, истом кад је она изашла изван бедема потенцијала.

Скопље, у јуну 1949.
Физички институт

МАРИН КАТАЛИНИЧ

РЕДКИЙ СНИМОК АЛЬФА РАСПАДА В СЕМЕЙСТВЕ ТОРИЯ

(*Резюме*)

Автор дискутирует по поводу одной исключительно редкой звезды альфа-распада в семействе тория. Звезда обнаружена в светочувствительном эмульсионном слое одной К-пластинки Agfa, которая была промыта 30 минут в весьма разведенном растворе нитрата тория, а затем, после 3-х дней проявлена и закреплена.

Это шестиконечная звезда, показывающая и краткий путь алъфачастицы из тория, и длинный альфа-частицы из ThC' (фиг. 1, табл. 1, увеличение 800 × 1,09 ×). Анализ снимка при увеличении 2.400 × показывает, что это действительно шестиконечная звезда, а не, может быть суперпозиция двух звезд, ибо расстояния исходных мест отдельных следов выражены в 0,3 до 0,4 μ; а это легко обьясняется тем, что первоначалньный атом тория в это время диффундировал. Следовательно, звезда показывает постепенный альфа-распад от Th до ThD.

Все пути, кроме наиболее короткого, достаточно горизонтальны; наиболее короткий путь спускается к горизонтальной под углом около 50°. Анализ принадлежности следов отдельным элементам семейства тория производился таким образом, что один след произвольно приписывался одному элементу, а затем при помощи следующей из этого вычисленной способности торможения эмульсии вычислялись воздушные эквиваленты остальных путей. Пути обозначались порядковыми числами начиная от наиболее краткого следа по направлению движения часовой стрелки. Лучшее схождения вычисленных воздушных эквивалентов с пробегом R_{18} для отдельных элементов получается если путь № 6 припишется альфа-частице из ThA. Но в таком случае воздушный эквивалент следа № 4 соответствует альфа-частице с аномальным пробегом ($R_{18} = 9{,}88$ cm.), которою весьма редко отсылает (33,6 : 10⁶) ThC'. В этом состоит другая исключительньная характеристика этой звезды.

Главные данные содержатся в таблице 1. Обозначения в этой таблице следующие: λ = длина следа в эмульсии в микронах, L = воздушный эквивалент в см для тормозной способности 2050 : 1, R_{18} = пробег альфачастицы в cm в воздухе нормального давления и температуры 18° C;

T = период распада элемента. Воздушный эквивалент L для пути № 4 еще лушче соответствует (9,83 cm) аномальному пробегу R_{18} для ThC' если принять во внимание повышение тормозной способности эмульсии вместе с повышением энергии по отношению к (7).

Автор берет в дискуссию и то обстоятельство что пути NN 3 и 6 диаметрально противположны, а вместе с тем принадлежат альфа-путям двух элементов которые следуют непосредственно один за другим, а другой элемент (ThA) обладает весьма коротким периодом распада. Ввиду того что это явление обнаружено еще и на трех пятиконечных и на одной четырехконечной звезде, которое всегда относилась к следам одинаковых относительных длин, автор считает это явление неслучайным. Автор ставит гипотезу выражающю что альфа-частица из ThA вылетела непосредственно за альфа-частицей из торона, во временном расстоянии порядка величин од 10^{-20} до 10^{-21} сек в то время как ядро и обе альфа-частицы в движении еще представляли единую систему свезанную и механически и электрически.

MARIN KATALINIĆ

ON A RARE PHOTOGRAPH OF THE ALPHA DECAY IN THE THORIUM SERIES

(*Excerpt*)

The author discusses an exceptional star of the alpha decay in the thorium series. The star was found in the sensitive layer of an Agfa K-plate, which was previously bathed for 30 minutes in a very dilute solution of thorium nitrate and after 3 days was developed and fixed.

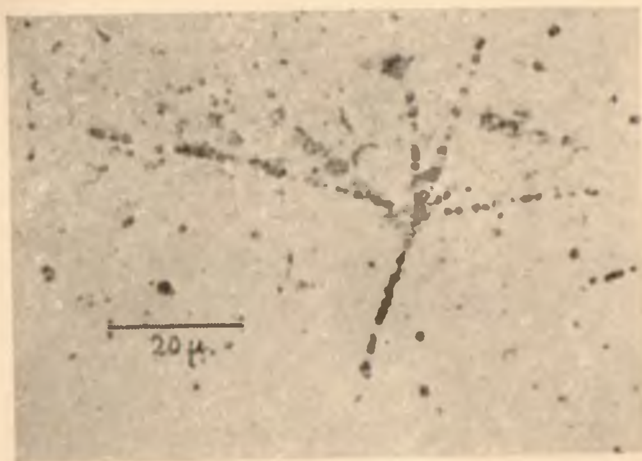
It is a six-prong star exhibiting both the short track belonging to the alpha particle of thorium and also the long one belonging to that of ThC' (Fig. 1, Plate I; magnification $\times$ 800 $\times$ 1,09). An analysis of the picture in a magnification $\times$ 2400 showed, that it exhibits actually a true 6-prong star, not perhaps a casual superposition, the starting-points of the single tracks differring one from another for at most 0,3 to 0.4 μ.; this slight difference may easily be ascribed to a diffusion of the initial thorium atom in the meantime. Therefore, the star represents the successive alpha decay from Th to ThD.

All tracks are more or less horizontal, the shortest track excepted, dipping in an angle about 50°. The attempts to ascribe single tracks to the individual alpha members of the thorium series were made in the following way. First a single track was arbitrarily ascribed to a member, and the stopping power of the emulsion and the air equivalents of the other tracks were calculated. Then the air equivalents were compared with the alpha ranges R_{18} belonging to the various members of the series. The tracks are in the sequel denoted by ordinal numbres clock-wise, beginning from the shortest track. The best and the most consistent results were obtained by ascribing the track № 6 to the alpha particle from ThA. But then, the air equivalent of the longest track, № 4, corresponds to the alpha particle with the anomalous range (R_{18} = 9,88 cm.) emitted very rarely (33,6 : 10^6) from ThC'. Herein subsists another exceptional character of this star.

The important data are given in table 1. The annotations there used denote: λ = the length of the track in the emulsion in μ ; L = the corres-

ponding air equivalent in cms. for the stopping power 2050 : 1; R_{18} = the range of the alpha particle in cms. air at 760 mm. Hg and 18° C; T = the half-value period. The air equivalent of the track № 4 corresponds still better (9,83 cm.) to the anomalous range of the alpha particle of ThC' by taking into account the increase of the stopping power with the energy of the alpha particle (7).

At last the author discusses the circumstance, that the tracks Nos. 3 and 6 lie diametrally opposite to one another, with regard to the facts, that they belong to two alpha elements following immediately one after another and that the second element (ThA) is very short lived. The same observation having been made on some 5-prong and 4-prong stars and concerning the tracks of the same relative lengths, the hypothesis is put forward, that in this case the alpha particle from ThA was ejected immediately after that from Tn, in a time interval of the order 10^{-20} to 10^{-21} sec., while the two issuing alpha particles and the remaining excited nucleus still constituted a mechanically and electrically coupled system. — Of course, this hypothesis does not exclude the possibility of a pure fortuitousness for some cases of diametrally opposite tracks.



Сл. 1. Повећање 800×1,09×

MARIN KATALINIĆ

NEKOLIKO PRILOGA O DEZINTEGRACIJAMA ATOMA KOZMIČKIM ZRAKAMA

(Primljeno 15 oktobra 1949 god.)

MARIN KATALINIĆ

NEKOLIKO PRILOGA O DEZINTEGRACIJAMA ATOMA KOZMIČKIM ZRAKAMA

(Sa 36 slika. Table II—X)

Istraživanje korpuskularnih zraka i atomskih dezintegracija pomoću fotografskih ploča sa specijalnim emulzijama hvata od nekoliko godina sve više maha, napose u istraživanjima kozmičkih zraka. Fotografska ploča ima prema Wilsonovoj komori glavnu kvalitativnu prednost u tome, što ona trajno registrira pojave, a ne na mahove, kako je to kod Wilsonove komore. Nesumnjiva prednost velikog volumena i velike dubine kod Wilsonove komore kompenzirana je kod fotografske ploče debljinom emulzije. Obzirom na veliku moć kočenja, kakvu ima fotografska emulzija, tim su dobro izjednačeni redovi veličine, a kod naročito debelih emulzija (do 700 μ) uz jednolično razvijanje po cijeloj debljini pomoću temperaturnog postupka[1]) dubina Wilsonove komore znatno je premašena. Kvantitativnoj obradi rezultata u znatnoj mjeri smeta vremensko slabljenje latentne slike (»*fading*«), jer ono prividno umanjuje i masu korpuskule (umanjivanjem gustoće zrna u tragu) i njezinu kinetičku energiju (skraćivanjem tragova). A ipak se sve više opaža težnja, da se ova metoda, usprkos različitim poteškoćama, što većma kvantitativno razvije. To će biti olakšano postignutim upoznavanjem okolnosti, koje prouzrokuju ili pogoduju fading[2]). Kvantitativnom proučavanju dezintegracija znatno smeta i okolnost, da dosadašnje vrsti emulzija nijesu registrirale elektronskih staza.

---

[1]) C. C. Dilworth, G. P. S. Occhialini a. R. M. Payne, Nature **162**, 102, 1948.

[2]) Upotrebljavam ovu englesku riječ kao tehnički termin za slabljenje latentne slike trajanjem vremena između postanka slike i razvijanja ploče, jer je nalazim upotrebljavanu kao tehnički termin u ovom smislu i u francuskoj literaturi. Vidi npr.: H. Faraggi & G. Albouy, C. R. **226**, 717, 1948; **228**, 68, 1949. — J. Edmont, Journ. Phys. Radium (8) **10**, 22, 1949.

Najnovijim vrstama emulzija velike osjetljivosti, kao Kodakova N. T. 4, uklonjena je i ta poteškoća, a time je također produbljen pogled u pojave, koje ploča registrira. Na taj je način fotografska ploča i po osjetljivosti gotovo dostigla Wilsonovu komoru.

Među nepovoljnim stranama ove metode istaknut ćemo dvije; obje su subjektivne prirode. To je u prvom redu sklonost opažača, da sve pojave u vidnom polju mikroskopa smatra istodobnima. To može uroditi pogreškama; jer ima bez sumnje dezintegracija, koje su nastale u stepenovima. Najbolji je primjer za to poznata T-dezintegracija.

Isto tako, lako naginjemo tome, da svaku dezintegraciju u fotografskoj ploči smatramo totalnom. Na taj se način dešava, da najveći dio zvijezda dezintegracije s malenim brojem trakova pripisujemo totalnim dezintegracijama jezgara lakih atoma iz želatina. Protiv toga već govori vrlo čest pojav trokrakih zvijezda s protonskim tragovima malene energije. S druge strane, treba pretpostaviti i znatan broj parcijalnih dezintegracija teških jezgara Ag i Br[3]); jer teškim jegrama pripada veći djelotvorni presjek, koji je proporcionalan sa $A^{\frac{2}{3}}$, gdje je A atomska masa. Pogotovo će lako dolaziti do parcijalnih dezintegracija kod perifernog ulaska ili prolaska brze korpuskule kroz tešku jezgru[4]).

U ovoj su radnji obrađena opažanja, koja sam izveo pred nekoliko godina.

1. Eksperimentalni podaci

Rađeno je s Agfinim *K*-pločama s debljinom osjetljivog sloja 40 μ. Prema ondašnjem pismenom saopćenju profesora Dr. J. Eggerta, kod izrade emulzije ove vrsti ploča naročita je pažnja bila posvećena tome, da su svi sastojci čisti od tragova radioaktivnih elemenata.

Ploče su izložene djelovanju kozmičkih zraka u trima skupinama. Jedna skupina (*A*) ploča izložena je na terasi Tomislavova Doma na planini Sljeme sjeverno od Zagreba (nadmorska visina 1016 m). Drugu skupinu (*B*) čine ploče, koje su bile izložene na terasi tornja Fizikalnog zavoda u Zagrebu (nadmorska visina ~ 145 m). Treću skupinu (*C*) čine ploče, koje su ostale u originalnoj kutiji u prizemlju zgrade Fizikalnog zavoda, pa su poslije 2 do 2,5 mjeseca razvijene (nadmorska visina ~ 127 m).

Ploče su na Sljemenu i na terasi tornja Fizikalnog zavoda bile eksponirane u dvjema serijama, u proljeću i u ljetu 1943.

---

[3]) G. Thomson, Phil. Mag. (7) **40**, 589, 1949. Vidi također: J. B. Harding, Phil. Mag. (7) **40**, 530, 1949, p. 541.

[4]) P. Cüer & M. Morand, C. R. **226**, 659, 1948. — D. H. Perkins, Nature **160**, 299, 1947.

One su ostale izložene 30 do 34 dana. Razvijene su istog dana, kada su bile skinute, tako da nije bilo naročitog fadinga uslijed zakašnjelog razvijanja. Naravno, fadingom su svakako jače oslabljene latentne slike procesa nastalih u prvim danima ekspozicije u poredbi s onima, koji su nastali u posljednjim danima. — Za razvijanje upotrebljavan je normalni razvijač metol-hidrochinon u razrijeđenju 1 : 4. Razvijanje je prema propisu trajalo 5^m.

Tom prilikom treba upozoriti na ovo općenito zapažanje. I u pločama skupine *B* i u pločama skupine *A* nađeno je zvijezda dosta velike energije, s 8 do 9 trakova. U posljednje vrijeme našli su drugi istraživači[5]) u osjetljivom sloju ploča, koje su bile eksponirane na morskom nivou zvijezda velike energije, koje su imale do 22 traka. Kako fading, prema svom uzroku, ne mora u jednakoj mjeri zahvaćati sve dijelove ploče — jer to zavisi o pristupačnosti za kisik i za vlagu[6]), a ta pristupačnost opet zavisi o načinu, kako je ploča eksponirana — neće se kod ploča, koje su bile neko vrijeme eksponirane na većoj visini, moći ustanoviti s apsolutnom sigurnošću, da je jedna zvijezda nastala uprav na toj visini. Jer, ona je mogla nastati i prije toga, na manjoj visini, a u povoljnim prilikama mogla se latentna slika održati sve do razvijanja. Samo je i zbog većeg intenziteta kozmičkih zraka, napose onih korpuskula, koje većinom izazivaju dezintegracije, daleko mnogo vjerojatnije, da je zvijezda nastala na većoj visini.

U prvoj seriji eksponiranih ploča, i u skupini *A* i u skupini *B*, ploče su bile eksponirane u parovima tako, da je u svakom paru osjetljivi sloj jedne bio okrenut prema osjetljivom sloju druge ploče. Svaki takav par ploča bio je unakrst čvrsto privezan jakim koncem, a onda je jedan ugao tako sastavljenog para bio označen zarezom na staklu. Svrha ovakvog uređaja bila je u tome, što se, po uzoru na uređaje u W i l s o n ovoj komori za istraživanje kozmičkih zraka, htjelo ispitati, da li je jedna zvijezda, koja je nađena u osjetljivom sloju jedne ploče, ostavila tragova i u nasuprotnom sloju druge ploče, kao i to, kakvi su ti tragovi. Označivanje uglova zarezom na staklu osiguravalo je onda, da se takav par ploča može namjestiti pod mikroskopom tako, da su se korespondentne tačke obaju slojeva nalazile jedna iznad druge s dovoljnom približnošću. Ako je u sloju jedne ploče nađen jedan zanimljiv objekt s dosta velikom energijom, za koji je trebalo ispitati eventualne tragove u nasuprotnom sloju, pripadna druga ploča istog para položena je pod objektivom u korespon-

---

[5]) Npr.: R. R. R o y, Nature **160**, 498, 1947. — P. C ü e r, M. M o r a n d & H. M o u c h a r a f y e h, C. R. **226**, 713, 1948. — H. F a r a g g i & G. A l b o u y, C. R. **227**, 276, 1948.

[6]) R. C o p p e n s, C. R. **227**, 61, 1948; Journ. Phys. Radium (8) **10**, 11, 1949. — G. A l b o u y & H. F a r a g g i, C. R. **228**, 68, 1949; Journ. Phys. Radium (8) **10**, 105, 1949.

dentan položaj, u sloju donje ploče ponovo je nađen isti objekt, pa je u sloju gornje ploče ispitana okolica nasuprot objektu. Debljina stakla dozvoljavala je ovakvo istraživanje još kod povećanja 275 ×.

Prije nego su ploče para privezane, bile su u njihovim uglovima zapisane olovkom njihove oznake, po kojima se poslije razvijanja mogla ustanoviti pripadnost ploča jednom paru, a osim toga se po oznakama moglo ustanoviti, da li je ploča imala kod ekspozicije sloj naviše ili sloj naniže. — Naravno, svi podaci o načinu ekspozicije bili su zabilježeni u zapisniku opažanja.

Ovako sastavljeni parovi ploča bili su priređeni na dva različita načina. Bilo je parova, kod kojih su slojevi bili pritisnuti neposredno jedan uz drugi. Kako je fading uzrokovan kisikom iz uzduha uz pristup vlage[7]), u ovakvim su parovima latentne slike trebale biti najbolje očuvane. — U skupinama *A* i *B* bio je po jedan par ploča, u kojem je između sloja i sloja bila umetnuta olovna folija debljine 0,3 mm. Tim je oponašana olovna pregrada u Wilsonovoj komori za istraživanje kozmičkih zraka. Tako tanak sloj olova uzet je iz posebnih razloga. Da bi se izbjegla mrena na osjetljivom sloju ploče pod eventualnim djelovanjem olova, folija je bila s obje strane obložena papirom debljine 0,1 mm. Tako je sloj bio odijeljen od sloja sa 2 × 0,1 mm papira i sa 0,3 mm olova.

Jedna grupa parova ploča priređenih na opisani način bila je poredana u velikoj drvenoj fotografskoj kaseti, par uz par, i eksponirana je sa slojevima horizontalno; t. j. ploče su bile eksponirane vertikalnoj komponenti kozmičkih zraka. Neposredno uz ovu kasetu, u istom drvenom sanduku, smještena je vertikalno kartonska kutija s isto tako priređenim parovima ploča, ali položenih jedan na drugi. Prema tome, ova druga grupa ploča bila je eksponirana horizontalnoj komponenti kozmičkih zraka.

Eksponirane na otvorenim terasama, ploče su na taj način bile s gornje strane opkoljene materijalom s atomima malenih rednih brojeva, osim olova u parovima s umetnutim olovnim folijama; s donje su strane bile izložene natražnoj struji sekundarnih zraka iz materijala s atomima osrednjih rednih brojeva[8]).

Ploče skupine *C*, koje su prije razvijanja ležale u laboratoriju u originalnom omotu, razlikuju se prilikama ekspozicije od ploča skupina *A* i *B* u tome, što su se iznad njih nalazila tri betonska plafona s ukupnom debljinom oko 3 × 10 cm. Prema tome, ploče ove skupine bile su izložene pljuskovima nastalim u materijalu s osrednjim rednim brojevima atoma. — U zapisniku opažanja zapaženo je kod ploča iz ove skupine *C*, da su one mnogo siromašnije na dugim pojedinačnim protonskim trago-

---

[7]) Vidi l. c. 6).

[8]) Cf.: B. d'Espagnat & Ch. Peyrou, C R. **228**, 674, 1949.

vima, ali da su bogatije na 3-krakim i na 4-krakim zvijezdama malene energije.

Sve ploče ove prve serije, uključujući i skupinu C, pripadale su emulziji s istim brojem fabrikacije.

Prva opažanja na razvijenim pločama iz ove prve eksponirane serije potaknula su pitanje, kako djeluje *neposredni* okolni medij iznad sloja na brojnost dugih pojedinačnih protonskih tragova u sloju. Kako se činilo vrlo vjerojatnim, da se dobrim dijelom može raditi o protonima izbijenim iz drva od brzih neutrona, učinjene su u drugoj seriji eksponiranih ploča ove promjene. Ploče nijesu eksponirane u parovima već pojedinačno, sa slojem naviše. U svakoj skupini umetnute su po jedna ploča sa slobodnim slojem, po jedna ploča s pločicom parafina debljine 2,5 mm iznad sloja i po jedna ploča s pločicom olova debljine 2 mm iznad sloja. Kao i u prvoj seriji, i ovog je puta bila umetnuta kartonska kutija s pločama isto tako priređenim, ali postavljenim vertikalno, t. j. izloženim horizontalnoj komponenti kozmičkih zraka. — Nažalost ova druga serija nije dala željenih rezultata. Radilo se o novoj pošiljci ploča, koje su poslije razvijanja — po svoj prilici zbog lošijeg kvaliteta — općenito pokazivale znatnu mrenu, tako da su se dale samo mjestimice upotrebiti. — Sve snimke u ovoj radnji pripadaju prvoj seriji ploča.

Već je više istraživača upotrebljavalo fotografske ploče sa slojevima olova iznad njih. Tako su Cortini i Manfredini[9]), te Lord i Schein[10]) nedavno istraživali pitanje tzv. prelaznog efekta u olovu pomoću fotografskih ploča, iznad kojih su se nalazile olovne ploče. Samo su kod njih olovni slojevi imali bitno veće debljine. — Perkins[11]) je iznad fotografskih ploča (Ilfordove C 2) stavljao grafit, parafin, mesing i olovo u debljinama 1 cm. — Ploče (Ilfordove C2), koje sam u ljetu 1948. eksponirao na visini 2570 m na Šar-Planini, bile su — u vezi s pojavima opaženim na nekim pločama prve serije, a prikazanim u drugoj radnji — priređene na sličan način. Kako su tražili spomenuti rezultati, neke su ploče iznad sloja (sloj naviše) imale olovne folije od 0,2 mm do ukupne debljine 1,0 mm; jedna je ploča bila impregnirana olovnim nitratom; tri su ploče imale iznad sloja lim Al, ili lim Cu, ili lim Fe. Radi usporedbe bila je umetnuta jedna ploča sa slobodnim slojem, odnosno iznad njezina sloja bio je samo tanak sloj papira. — Nedavno su sa slično priređenim pločama radili Ždanov i Podkopaev[12]). U jednoj skupini ploča oni su imali na osjetljivom sloju ploče tanku

[9]) G. Cortini a. A. Manfredini, Nature **163**, 991, 1949.
[10]) J. J. Lord a. M. Schein, Phys. Rev. (2) **75**, 1256, 1949.
[11]) D. H. Perkins, Nature **160**, 707, 1947.
[12]) A. P. Ždanov i J. N. Podkopaev, Dokl. Akad. Nauk SSSR (DAN) **64**, 313, 1949.

foliju Al, ili Cu, ili Pb. U drugoj skupini radili su s parovima ploča, a među nasuprotnim slojevima bila je ploča od stakla, kojoj su oba lica bila premazana slojem parafina debljine 0,8 mm. —

Baždarenje ploča. Da bi se ploče energetički baždarile, potrebno je po tragu čestice u emulziji ustanoviti vrst čestice, odnosno saznati njezinu masu. Kod alfa čestice i protona, poznavajući moć kočenja emulzije, možemo iz duljine traga pomoću poznatih formula o zavisnosti dosega o brzini odrediti početnu brzinu čestice. Tim je poznata početna kinetička energija čestice.

Osnovnu važnost u prosuđivanju vrsti jonizirajućih čestica, kojima opažamo tragove u emulziji, ima gustoća zrnaca izlučenog srebra uzduž traga. Kod čestica s nabojnim brojevima $z \geq 3$ pridolazi i debljina zrnaca. Gustoću zrna u jednom dijelu traga definiramo u ovoj radnji pomoću srednjeg razmaka (δ) među zrncima, izraženog u mikronima. Glavno baždarenje izvedeno je za alfa zrake radioaktivnih elemenata uranova niza i torijeva niza poznatim postupkom. Po jedna ploča iste emulzije impregnirane su razrijeđenom rastopinom uranova nitrata, odnosno torijeva nitrata, pa su nakon 4 dana razvijene[13]). Zbog znatnog rasipanja dosega alfa zraka u emulziji, teško je odrediti pripadnost jednog traga alfa čestice nekom određenom radioaktivnom elementu iz tog niza; pogotovo to vrijedi za uranov niz. U torijevu nizu radi se vrlo pretežno o zvijezdama raspadanja iz radiotorija i njegovih kratkovječnih sljednika. Zbog toga su dosezi u emulziji dulji, odnosno razlike u duljinama tragova su uočljivije, pa je tako koordiniranje tragova nešto lakše. Takvom identificiranju dosta smetaju u ovom nizu tragovi alfa čestica iz ThC, ako je raspadanje išlo ogrankom ThC $\rightarrow$ ThC″ $\rightarrow$ ThD. Zato su za baždarenje upotrebljavane zvijezde, koje su sadržavale dugački trag staze alfa čestice iz ThC'. Naravno, birane su takve zvijezde (4- i 5-krake), u kojima su tragovi bili dobro horizontalni ili malo nagnuti prema površini emulzije.

Uzimajući u obzir rasipanje dosega i poteškoće koordiniranja tragova odnosnim elementima, moralo se kod ploča s uranom zadovoljiti s tim, da su odvojene grupe srednjih dosega (14,4 μ, 18,2 μ, 21,4 μ), pa su za ove dosege određeni srednji razmaci zrnaca. Pokazalo se, da je to posve dovoljno. U torijevu nizu određeni su srednji doseg i srednji razmak zrnaca izravno samo za alfa zrake iz ThC', a za ostale elemente ovog niza uzete su samo grupe srednjih dosega (26,0 μ, 30,2 μ), pa je za ove određeno δ.

Aritmetičke sredine rezultata brojenja zrnaca za različite grupe dosega (prosječno 400 μ do 600 μ po grupi) prikazane su u tablici 1. Pod *E* je naveden radioaktivni niz. U trećem stupcu

[13]) Vidi prethodnu radnju istog autora u II. knjizi ovog Zbornika, str. 47.

navedeni su uzdušni ekvivalenti (R), uzimajući za moć kočenja emulzije 2050 : 1. U posljednja dva retka navedeni su podaci za tragove dviju alfa zraka velikog dosega, koje su kao takve identificirane u jednoj dezintegraciji kozmičkim zrakama.

Tablica 1.

E	Skupina dosega (μ)	Uzdušni ekvivalent R (cm)	Srednji razmak zrnaca δ (μ)	Napomena
U	14,4	2,95	1,45	Vrijednosti za srednji razmak δ u ovoj tablici općenito su manje od onih koje je dao E. Schopper (Veröff. Agfa, VI. 170, 1939, str. 174) za alfa zrake u K-pločama. On nalazi $\delta \sim 1{,}9\,\mu$. To se može svesti na razlike u razvijanju ploča. I protonski tragovi imaju kod njega mnogo veće razmake δ nego ovdje. Vidi također: Phys ZS. *40*, 22, 1939, str. 25.
	18,2	3,73	1,55	
	21,4	4,39	1,54	
Th (*RdTh*)	26,0	5,33	1,52	
	30,2	6,19	1,68	
	43,1	8.83	1,82	
—	113,5	23,3	1,53	
—	138.5	28,4	1,78	

K-ploče pokazuju za isto područje dosega alfa zraka znatna kolebanja gustoće zrna, veća nego bi mogla biti prouzročena fadingom u vremenu od 4 dana, sve kad bi se uzelo, da je emulzija bila jedan cijeli dan vlažna[14]). Istina, u pojedinim grupama dosega vrijednosti δ dosta su gusto okupljene oko navedenih srednjih vrijednosti δ u tablici. Ali npr. za uranovu grupu 21,4 μ pojedine, rijetke vrijednosti δ sežu do 1,3 μ i do 1,8 μ. Kod ThC' granice rasipanja za δ jesu 1,5 μ i 2,1 μ. Prema opažanjima čini se vrlo vjerojatnim, da se ta kolebanja imaju pripisati manjkavoj homogenosti emulzije, jer su zbog toga zrnca AgBr negdje gušće, a negdje rjeđe rasijana. U prilog tome govori i činjenica, da na

[14]) Ploče su bile sušene u mlazu uzduha, pa su se osušile kroz neko 4 sata.

dugim i vrlo dugim protonskim tragovima nailazimo na dosta velika područja, u kojima srednji razmak zrnaca jako nadilazi poprečni normalni razmak zrnaca u istom tragu ili na drugim protonskim tragovima u istoj ploči. Razlike znatno nadmašuju opseg statističkih kolebanja.

Kod dugih i vrlo dugih pojedinačnih protonskih tragova srednji razmaci zrna, mjereni na duljinama ~ 150 μ, variraju između 2,3 μ i 2,9 μ, sa rasipanjima do iznad 3 μ. Kratki tragovi u zvijezdama, koji se bez sumnje imaju pripisati protonima malene energije, imaju razmake δ između 2 i 2,3 μ. Na taj način ostaje između alfa čestica i sporih protona izvjestan razmak gustoća zrna, u kojem dolaze tritoni i rijetki deutoni. Zbog malenih razlika u gustoćama zrna, za ove je mogućnost identificiranja i po sebi mnogo teža[15]).

Na osnovu Blackettove empiričke formule za doseg protona u zavisnosti o brzini izrađena je krivulja energije protona u zavisnosti o njihovu dosegu i prenesena je na doseg protona u emulziji pomoću poznate moći kočenja. Istim postupkom, na osnovu Geigerove formule, izrađena je takva krivulja za alfa čestice do dosega 30 cm u uzduhu. Pomoću tih krivulja određivane su energije protona i alfa čestica iz njihovih dosega u emulziji.

U mezonskim tragovima gustoće zrna mnogo su manje u početku trajektorije nego pri njezinu kraju. Kod mezona, kojima se može pripisati masa oko 200 m_e, srednji razmak zrna leži u početku staze oko 3,3 μ, a na njezinu kraju oko 2,5 μ.

Istraživanje ploča pod mikroskopom izvedeno je dijelom g. 1943. i većim dijelom g. 1946. Zbog nestašice fotografskog materijala, vrlo se rijetko moglo primijeniti snimanje zanimljivijih objekata u više nivoa, da bi se odatle sastavile mozaične slike, u kojima bi svi dijelovi pojedinih tragova bili oštri. Objekti su ponajviše snimani u povećanju 275 × (260 ×), tako da je slabija oštrina tragova, koji idu više ili manje koso prema horizontali, manje smetala. Neke veće zvijezde i neki od dugih pojedinačnih tragova, koji su ležali još dosta položito za snimanje, snimani su u povećanju od samo 77,5 × (74 ×). Prije snimanja svaki je objekt vizuelno ispitan kod povećanja 480 × i 800 ×. Opažanja o nivoima unešena su u zapisnik opažanja, u kojem je svaka snimka opisana. Podaci u tekstu o pojedinim snimkama uzeti su iz tih zapisnika.

Kod analize dezintegracija služio sam se tablicom izotopa od Seaborga[16]), u ruskom prevodu[17]), i tablicom izotopa u najnovijem izdanju Kohlrauscha[18]).

---

[15]) Cf.: J. Edmont, l. c. 2), p. 29.
[16]) G. T. Seaborg, Rev. Modern Phys. 16, 1, 1944.
[17]) Uspehi fizič. nauk 28, 285, 1946.
[18]) F. Kohlrausch, Prakt. Physik, 18. izd., vol. II, New-York 1947, tablica 71.

Kod organizacije ovog istraživanja sudjelovao je Dr. Branimir M a r k o v i ć, onda asistent Fizikalnog zavoda u Zagrebu. On mi je pomagao kod priređivanja ploča; sam je oba puta prenio sanduk s pločama na Sljeme, gdje ih je eksponirao, i sam ih je donio natrag. Dr. M a r k o v i ć je sudjelovao u početku i kod istraživanja ploča pod mikroskopom; ali je kasnije morao ovo istraživanje napustiti zbog nedostatka vremena. Dru. Branimiru M a r k o v i ć u izražavam i na ovom mjestu toplu zahvalnost. — Sve objekte prikazane u ovoj radnji ja sam našao i snimio.

2. Dezintegracije atoma neutralnim česticama

Prema najnovijim rezultatima istraživanja, najveći dio dezintegracija kozmičkim zrakama izazivaju čestice, koje ne ioniziraju[19]). Glavnim dezintegratorima treba uzeti brze neutrone, dok se fotonima može pripisati samo neznatan dio dezintegracija. Često se uzima, da tako mogu djelovati i hipotetički neutralni mezoni. Pretpostavlja se, da brzi neutron ne biva zahvaćen u jezgri, nego prođe kroza nju ostavljajući u njoj energiju od kojih 30 MeV do 100 MeV, već prema masi atoma. Pogotovo se takav proces zbiva u lakim jezgrama. Uzbuđena se jezgra djelomično ili totalno rasprsne. Kako energije brzih neutrona idu do 200 MeV[20]), može brzi neutron na taj način izazvati redom nekoliko dezintegracija jezgara lakih atoma.

Direktne dokaze za ovakav mehanizam dezintegracije daju sl. 1 i 2 (Tabla II). U sl. 1 (h = 1016 m) počeci triju pojedinačnih tragova, ishodište jedne dvokrake zvijezde i ishodište jedne trokrake zvijezde leže na pravcu (projekciji), kojemu su krajevi nacrtani tušem na rubu slike[21])[22]). Prvi i treći (s desna) pojedinačni trag zalaze dosta strmo u dubinu; ali gustoća zrna, opažana u emulziji pokazuje, da su oba traga, kao i srednji, protonski tragovi. Prema tome, radi se o protonima odbačenim od brzog neutrona. Kod trokrake zvijezde samo je najdulji krak prilično horizontalan; od ostalih dvaju krakova jedan se strmo penje, a drugi se vrlo strmo spušta prema staklu. Sva tri kraka odgovaraju gustoćom zrna tragovima alfa čestica. Prema tome, imamo tripar-

[19]) G. T h o m s o n, Phil. Mag. (7) **40**, 589, 1949.

[20]) W. M. P o w e l l, Phys. Rev. (2) **69**, 385, 1946.

[21]) Kod ploča izloženih vertikalnoj komponenti kozmičkih zraka interesantno je znati, da li je neki trag nagnut u smjeru primarnih kozmičkih zraka ili je nagnut nasuprot tome pravcu. Da bismo obuhvatili i slučaj, gdje je u parovima osjetljivi sloj bio okrenut naviše, i slučaj sloja okrenutog naniže, označujemo smjer nagiba traga znakom ↓, ako trag od ishodišta zvijezde ponire u smjeru primarnih zraka, a znakom ↑ označujemo slučaj poniranja u suprotnom smjeru. — Sa h označujemo nadmorsku visinu, na kojoj je ploča bila eksponirana.

[22]) U stvari, staza neutrona lagano ponire prema trokrakoj zvijezdi; smjer poniranja ↓.

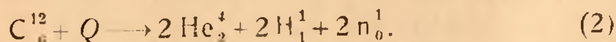
ticiju jedne jezgre; kad se uzme u obzir kosi položaj zvijezde, i kutovi su dosta dobro održani, zanemarujući impuls od neutrona, koji je ušao i izašao. Uzimajući za sve tri alfa čestice isti doseg (u emulziji 34,6 μ, uzdušni ekvivalent ~ 7,1 cm), dobivamo za ukupnu kinetičku energiju zvijezde $Q' \sim 23{,}3$ MeV. Uz gornju pretpostavku, da brzi neutron nije ostao u jezgri, već je izletio iz nje, radi se o triparticiji glavnog ugljikova izotopa prema jednadžbi:



$$C_6^{12} + Q \longrightarrow 3\,He_2^4 \qquad (1)$$

za $Q \sim 30$ MeV.

Sl. 2 (h = 127 m) nepotpuna je, jer se na strani označenoj strjelicom, u produženju pravca položenog kroz ishodišta obiju zvijezda, u daljini ~ 190 μ od ishodišta gornje zvijezde, nalazi još jedan pojedinačni protonski trag, kojemu početak leži u istom pravcu. Očito se radi o dvjema uzastopnim dezintegracijama istim brzim neutronom, koji je u nastavku svog puta odozdo naviše iznad gornje četverokrake zvijezde još odbacio jedan proton. Po gustoćama zrna i gornja i donja zvijezda imale bi se sastojati od po dvije alfa čestice i po dva protona. Uzmemo li, da se radi o totalnim dezintegracijama, moglo bi se i ovdje pretpostaviti, da imamo dezintegracije glavnog ugljikova izotopa. Pored navedene klasifikacije tragova, podlogom za takvu procjenu mogla bi nam služiti relativna brojnost, kojom je ugljik zastupan u želatinu (50,2% po Allenu)[23]). Dolazila bi u obzir ovakva shema dezintegracije:



$$C_6^{12} + Q \longrightarrow 2\,He_2^4 + 2\,H_1^1 + 2\,n_0^1. \qquad (2)$$

Analiza vidljivih tragova daje za ukupnu kinetičku energiju donje zvijezde 15,4 MeV, a za donju zvijezdu 18,4 MeV. Međutim je razlika masenih defekata 35,4 MeV. Razlike su prevelike za dva preostala neutrona. Prema tome, u oba se slučaja može raditi samo o parcijalnim dezintegracijama.

Pripisivanje ovih dviju dezintegracija, i sličnih, atomu lakog elementa opravdano je i tim, što u njima ne dolaze tragovi alfa čestica s energijama iznad 10 MeV[24]).

U istu skupinu dezintegracija, t. j. u dezintegracije proizvedene istim brzim neutronom, treba ubrojiti i struju čestica u sl. 3 (Tabla II), kao i dvojnu dezintegraciju u sl. 4 (Tabla III). Kod sl. 3 (h = 1016 m) radi se o brzom neutronu, koji je projurio uz površinu stakla (smjer ↑ prema kratkom dvojnom tragu), tako da su iz obiju dezintegracija u staklu prodrle u emulziju

---

[23]) Za podatke o atomarnom sastavu želatina, po Allenu, dugujem zahvalnost drugu dru. J. Jančulevu.

[24]) Cf.: D. H. Perkins, Phil. Mag. (7) 40, 601, 1949.

samo najbrže čestice krajem svojih dosega. Radi se pretežno o alfa česticama; tragovi idu dosta strmo, svi osim jednoga nagnuti u smjeru ↓.

U sl. 4 (Tabla III, *h* = 145 m) tragovi imaju manjkavu oštrinu, jer su zakrivljeni tragovi iz 4-krake zvijezde zakrivljeni i u vertikalnoj ravnini, pa je slika snimljena u osrednjem nivou s ponajboljom oštrinom. Obzirom na položaj krakova u 4-krakoj zvijezdi treba prema zakonu o održanju veličine gibanja pretpostaviti, da je neutron prošao s desna na lijevo, dolazeći iz emulzije koso naviše, tako da je triparticija nastala na prelazu iz emulzije u papir iznad sloja. U triparticiji sva su tri kraka gotovo horizontalna. Zbog bitno kraćih dosega i zbog veće duljine jednog kraka treba uzeti, da ova triparticija predstavlja proces različit od onoga iz sl. 1. Sličniji je triparticiji bora uhvaćenim neutronom (2 alfa čestice i 1 triton). – Može se raditi i o samom boru, koji je mogao doći u emulziju kod izrade ploča.

Sl. 5 *a* i 5 *b* (Tabla III, *h* = 145 m) snimljena je u dva nivoa, jer prikazuje dvojnu dezintegraciju, gdje su obje zvijezde u kratkom razmaku jedna ispod druge. Čini se dosta vjerojatnim, da su obje dezintegracije izazvane istom neutralnom česticom, koja bi bila upala u emulziju vrlo strmo odozgo iz pravca nagnutog prema lijevom gornjem uglu slike. Ali onda ima poteškoća sa zakonom o održanju veličine gibanja u prvoj zvijezdi (sl. 5 *a*), gdje je taj zakon obzirom na navedeni smjer gibanja primarne čestice loše održan, osim ako se pretpostavi i emisija jednog ili dvaju neutrona kroz donji desni sektor zvijezde.

Leprince-Ringuet i Heidmann[25]) drže, da su ovakvi parovi zvijezda prouzrokovani neutronom, koji je izletio iz jedne zvijezde i prouzrokovao drugu.

3. Dvojne zvijezde izazvane nabijenim teškim česticama

Pod teškim česticama, koje ioniziraju, razumijevamo ovdje protone i alfa čestice. Mogli bi biti i deutoni i tritoni; ali deutonskih tragova malo se nalazi, a za dezintegracije tritonima ima malo evidencije. Formalno, po obliku, mogu se amo pribrojiti i slučajevi, gdje se teži atomski fragmenat, izbačen u prvoj dezintegraciji, dalje raspadao. U ovu drugu skupinu pripadaju, od starijih, neke od dezintegracija, koje je opažao Tamburino[26]), i poznate biparticije oblika T.

U prvoj skupini radi se o dvojnim zvijezdama nastalim na taj način, što je teška čestica, izbačena iz jedne zvijezde, prodrla u drugu jezgru i izazvala njezinu dezintegraciju. Takvi su slu-

---

[25]) L. Leprince-Ringuet a. J. Heidmann, Nature **161**, 844, 1948.
[26]) S. Tamburino, Phys. Rev. (2) **69**, 35, 1946.

čajevi dosta rijetki. Primjer za to imamo u sl. 6 (Tabla IV, h = 145 m). Iz donje 4-krake zvijezde izletio je jedan proton, prema gustoći zrna u tragu s početnom kinetičkom energijom > 30 MeV, koji je nakon puta od 40 μ prodro u jednu laku jezgru i izazvao dezintegraciju sa 3 protonska i jednim kratkim, gušćim trakom.

U sl. 7 (Tabla III) sekundarnu dezintegraciju izazvala je alfa čestica (h = 1016 m). Donja dezintegracija (primarna) sastoji se od dva protonska traga, od odbojnog atomskog fragmenta sa $z \sim 3$ i od alfa zrake, kojoj je trag malo iza polovine svoje dužine jednokratnim rasipanjem slomljen za $\sim 15^0$. Po gustoći zrna može joj se trag usporediti s tragom alfa zrake iz ThC', odnosno može joj se pripisati početna kinetička energija $\sim$ 8 MeV. Prema tome, imala je nakon prevaljenog puta od 23 μ (4,7 cm u uzduhu) još dosta energije da prodre u laku jezgru i izazove novu dezintegraciju.

Od spontanih T-dezintegracija tipa Be_4^{8} nađena je samo jedna, koja u prvoj približnosti pripada tom obliku. Prikazana je u sl. 8 (Tabla IV, h = 117 m), koja je mozaično sastavljena iz dviju snimaka u različitim nivoima. Treba je tumačiti trokratnom dezintegracijom. Najprije se prvobitna atomska jezgra dezintegrirala izbacujući dva protona, kojima pripadaju onaj najdulji protonski trag (zalazi položito u dubinu) i kratak protonski trag, koji ide nalijevo od ovog traga. U toj je dezintegraciji izletio na suprotnu stranu atomski ostatak, koji je strmo zašao prema površini emulzije. Ovaj se atomski ostatak spontano raspao u jednu alfa česticu ili triton (trag najbliži dugom protonskom iz prvog procesa; ide strmo prema površini emulzije), u jedan proton i novi atomski ostatak, koji je odletjeo naniže, i tu se u konačnom procesu dezintegrirao u dva prividno diametralna traga. Međutim već se iz nejednake oštrine ovih dvaju tragova opaža, da oni u vertikalnoj ravnini ne leže u pravcu. U stvari, desni trag zalazi položito u dubinu, a lijevi se strmo penje naviše; po svoj prilici i stvarne dužine su im nejednake. U horizontalnoj ravnini odvajaju se od pravca za neko 10^0. S druge strane, oba traga gustoćom zrna znatno zaostaju za tragovima alfa čestica. To pokazuje, da se posljednji posredni atomski ostatak ne može pripisati izotopu Be_4^8. Prema svemu bit ćemo bliže stvarnosti, ako uzmemo, da se u posljednjem procesu radi o triparticiji, gdje su na jednu stranu odletjeli jedan deuton i jedan neutron, a na suprotnu stranu jedan triton, tako da bi posljednji atomski ostatak bio He_2^{6*}. Da bi ovakva triparticija ovog malo poznatog atoma bila vjerojatna, trebamo pretpostaviti, da se on nalazio u visoko uzbuđenom energetičkom nivou; to smo označili znakom zvijezdice uz njegov znak.

Prema rednim i masenim brojevima u ovom bilansu, cijeli bi se proces imao prikazati ovako:

$$
\left.\begin{aligned}
& C^{12}_{6} + x \rightarrow Be^{10}_{4} + 2\,H^{1}_{1} \\
& \quad\quad \llcorner\!\!\rightarrow H^{3}_{1} + H^{1}_{1} + He^{6*}_{2} \\
& \quad\quad\quad\quad\quad\quad \llcorner\!\!\rightarrow H^{3}_{1} + H^{2}_{1} + n^{1}_{0}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)
$$

Sa x je naznačen nepoznati dezintegrator bez rednog broja, koji nije masom ostao u jezgri. Navedena varijanta s alfa česticom u drugom parcijalnom procesu ne odgovara, jer bi vodila na radioaktivni izotop N^{13}_{7} kao prvobitnu atomsku jezgru.

4. Mezoni

Mezoni su već više puta ustanovljeni na visinama oko 1000 m, kao i na morskom nivou. Kako nema, koliko mi je poznato, publiciranih iskustava s Agfinim K-pločama u pogledu mezonskih tragova, preostaju za prosuđivanje tragova, koji bi se mogli pripisati mezonima, samo analogna iskustva na drugim vrstama ploča za korpuskularna istraživanja: tanko zrno, malena gustoća zrna s povećim područjima statističkih kolebanja, česte promjene pravca zbog rasipanja. Teže je s pozitivnim π-mezonima, jer ne proizvode dezintegracija, a tragovi im se po gustoći zrna mogu zamijeniti za tragove vrlo brzih protona. To će pogotovo vrijediti za varitrone s masama usporedljivim s masom protona.[27 a]) S ovog gledišta vrijedi napomenuti, da su nađeni dugi i vrlo dugi ravni tragovi (do 1800 μ) s gustoćom zrna $\delta \sim 3\ \mu$, koji su na cijeloj dužini bili bez izbojaka, dok je opet bilo takvih, koji su uz istu gustoću zrna bili gotovo načičkani izbojcima. S druge strane treba napomenuti, da mezoni s energijama manjim od 20 MeV ioniziraju plin u Wilsonovoj komori kao spori protoni[27]).

U sl. 9 (Tabla IV, $h = 127$ m) prikazan je krivudavi trag, koji po svim karakteristikama pripada negativnom mezonu. Ukupna dužina traga iznosi 182 μ[28]), gustoća zrna u početku staze je $\delta = 3{,}2\ \mu$, ispred kraja staze $\delta = 2{,}4\ \mu$. Trag je savijen i u vertikalnoj ravnini; zato je snimljen u dva nivoa. Po gustoći zrna, može se raditi o mezonu s masom $m_\mu = 200\ m_e$.[29]). Na daljim 6 μ ispred kraja staze mezon je naglo promijenio pravac

[27]a) Cf.: A. I. Alihanjan, D. M. Samoilovič i dr., Žurn. eksper. teoret. fiz. **19**, 664, 1949; ibid. 667, 1949.

[27]) R. P. Shutt, Phys. Rev. (2) **69**, 261, 1946, p. 273.

[28]) Trag slučajno prolazi kroz dio ploče s nekoliko mrlja, pa mu i početak leži u jednom aglomeratu dlačica.

[29]) Za mezonske mase navodim vrijednosti, koje su dali Alihanjan i Alihanov, i suradnici: DAN **58**, 1321, 1947; Nature **163**, 761, 1949.

gibanja i trag završuje T-biparticijom lakog atoma. Radi se o biparticiji s krakovima nejednakim i po dužini i po gustoći zrna. Lijevi, kraći krak (8,4 μ, $\delta = 1{,}3\ \mu$) može odgovarati nabojnom broju $z = 3$; desni krak (14,5 μ) nejasan je, jer silazi u dubinu, ali sudeći po gustoći u početku odgovara nabojnom broju $z = 2$. Upada u oči malena kinetička energija, koju pokazuje ova dezintegracija u vidljivom obliku, mnogo manja od energije mase mirovanja mezonove. Takve su slučajeve nedavno opažali i diskutirali Heidmann i Leprince-Ringuet[30]).

Sl. 10 (Tabla VI, $h = 1016$ m) prikazuje trag jednog negativnog mezona s otprilike istom masom 200 m_e. Ukupna dužina traga iznosi 458 μ; gustoća zrna na početnih 50 μ je $\delta = 3{,}7\ \mu$, a na završnih 50 μ je $\delta = 2{,}5\ \mu$. Mezon je na kraju svoje staze izveo dezintegraciju jednog po svoj prilici srednje teškog atoma u dva teška fragmenta, kojima su tragovi tako gusto zaposjednuti, da su zrna posve srasla jedno uz drugo. Kod kratkog traga, koji se nastavlja iznad dezintegracije gotovo u pravcu mezonskog traga, nije jasno, radi li se o brzom protonu, koji je izletio iz te dezintegracije, pa izašao izvan emulzije, ili se — zbog krivudavosti traga i malene gustoće zrna — radi o novom mezonu*).

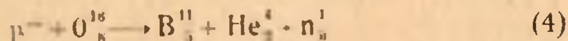
U sl. 11 (Tabla IV, $h = 1016$ m) imamo dvije dezintegracije, gdje su se atomi raskinuli u fragmente s nabojnim brojevima $z \geq 2$. Od gornje dezintegracije do donje ide jedan vrlo rijetko zaposjednuti krivudavi trag, koji je jako zakrivljen i u vertikalnoj ravnini. Određivanje raspodjele gustoće uzduž ovog traga djelomično je ometano njegovom krivudavošću u vertikalnoj ravnini. Osim toga, iz donjeg kraja debelog atomskog traga, koji iz gornje dezintegracije izlazi naniže, izletio je jedan zakrivljeni protonski trag, a ovaj se djelomično superponira na spomenuti krivudavi trag. Na svaki način, srednji razmak zrna uzduž ovog traga nije manji od 4 μ. Vizuelnim opažanjem dalo se ustanoviti, da je srednji razmak zrna nešto manji u donjem dijelu traga nego u gornjem. Na osnovu toga dopuštena je ova interpretacija. Iz gornje dezintegracije izletjela je čestica s malenom moći ionizacije, pa je ona prouzročila donju dezintegraciju. Ova se sastoji od dva vidljiva fragmenta, od kojih je jedan alfa čestica, dok drugome treba pripisati redni broj $z \geq 2$. Okolnost, da debljina traga ovog većeg fragmenta naglo raste prema njegovu kraju, upućuje na njegovo naglo kočenje zbog velikog nabojnog broja.

---

[30]) J. Heidmann & L. Leprince-Ringuet, C. R. **226**, 1716. 1948. — J. Heidmann, ibid. **226**, 1816, 1948. — D. H. Perkins, Phil. Mag. (7) **40**, 601, 1949, p. 605.

*) Krupna mrlja s tanjim nastavkom, koju vidimo lijevo od donjeg dijela mezonskog traga, pripada tragu krupnog atomskog fragmenta iz jedne druge dezintegracije, od koje je vidljiv i kraj jednog drugog, krivudavog traga.

Nema sumnje, da vijugavi trag pripada negativnom mezonu. Pokušat ćemo mu odrediti masu iz podataka donje dezintegracije pod pretpostavkom, da je ona totalna. Kao osnovu uzet ćemo, da se radi o dezintegraciji glavnog izotopa kisika, jednog od najtežih atoma iz sastava želatina. Teži ćemo fragmenat identificirati sa B^{11}_5. Onda bi reakcija glasila[31]):



$$\mu^- + O^{16}_8 \rightarrow B^{11}_5 + He^4_2 + n^1_0 \qquad (4)$$

Dužina traga teškog fragmenta iznosi 7,3 μ; to odgovara uzdušnom ekvivalentu 1,49 cm. Onda prema skraćenoj B o h r-ovoj formuli[32]) za doseg teškog fragmenta uz pomoć G e i g e r-ove formule dobivamo za njegovu početnu brzinu $v_5 \sim 9 \cdot 10^8$ cm . sec^{-1}. Doseg alfa čestice iznosi 13,5 μ, odnosno vazdušni ekvivalent je 2,76 cm, a ovome pripada početna brzina $v_2 = 1,4 \cdot 10^9$ cm . sec^{-1}. Neutronu pripisujemo kinetičku energiju 2 MeV. Iz položaja obaju tragova vidimo, da dezintegraciju smijemo uzeti bezimpulsnom, pogotovo ako uzmemo, da je neutron izletio u sektoru oko alfa čestice. Onda masu mirovanja m_μ mezona dobivamo iz jednadžbe:

$$m_\mu = \frac{m_5}{2}\left(\frac{v_5}{c}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{v_2}{c}\right)^2 + \frac{E_n}{c^2} + \Delta m \qquad (5)$$

gdje su m_5 i m_2 mase težeg fragmenta i alfa čestice, E_n je energija neutrona, a Δm razlika masenih defekata. Dobivamo:

$$m_\mu = 68\, m_e$$

gdje je m_e masa elektrona. Tako malena vrijednost m_μ kvalitativno je u skladu s izvanredno malenom gustoćom zrna u mezonskom tragu[33]).

Mezoni malene mase već su dosta često postulirani ili naslućivani. B á r n o t h y[34]) je izveo iz svoje teorije niz mezona s masama manjim od 100 m_e. R o s s i[35]) je neke tragove mezona u W i l s o n ovoj komori interpretirao kao mezone s masom mnogo manjom od 200 m_e. J á n o s s y[36]) pretpostavlja vrlo kratko-

---

[31]) Ova reakcija kisikove jezgre s mezonom je drugog tipa od onih, koji su proučavali L u k i r s k i j i P e r f i l o v (DAN, **54**, 219, 1946). Reakcija može zavisiti o masi mezona, analogno poznatoj dvojnoj reakciji dušika N^{14}_7 u zavisnosti o energiji uhvaćene alfa čestice. — Prvu od spomenutih reakcija L u k i r s k o g i P e r f i l o v a primijenio je nedavno D. H. P e r k i n s [Phil. Mag. (7) **40**, 601, 1949, p. 605] na negativne π mezone.

[32]) Cf.: J. B. H a r d i n g, Phil. Mag. (7) **40**, 530, 1949, p. 542.

[33]) Čini se, da su ovako slabo zaposjednute tragove već opažali M. M o r a n d, P. C ü e r i dr., C. R. **226**, 1008, 1948.

[34]) J. B á r n o t h y, Nature **161**, 681, 1948.

[35]) B. R o s s i, Phys. Rev. (2) **70**, 786, 1947.

[36]) L. J á n o s s y a. C. B. A. M c C u s k e r, Nature **163**, 181, 1949.

vječne teške elektrone s masom 10 m, a Auger i suradnici[37]) zaključuju, da u širokim kozmičkim pljuskovima ima dosta korpuskula s masom oko 3 m_e. — Kod Alihanjana i Alihanova[38]) najmanja mezonska masa je 110 m.

Gornjem mezonu stoje masom najbliže negativni mezoni malene mase, koje su našli Maier-Leibnitz*) [$m_\mu = (55 \pm 35)\, m_e$], Johnson i Shutt**) [$m_\mu = 75\, m_e$ s granicama pogreške $(+90, -40)\, m$] i Hugues*** [$m_\mu \sim (30 \pm 20)\, m_e$]. Ove su mase bile određene iz zakrivljenosti staza u Wilsonovoj komori u magnetskom polju.

Dodatak kod korekture. Krajem 1949. ustanovili su Alihanjan i njegovi suradnici (Žurn. eksperim. teor. fiz. **19**, 857, 1949) svojom metodom lake varitrone s masama $(100 \pm 15)\, m_e$, $(80 \pm 15)\, m_e$ i, vjerojatno, s masom oko 50 m_e. I ovdje se druga skupina masa dobro slaže s gore izračunanom mezonskom masom. —

Zvijezda u sl. 12 (Tabla IV, $h = 1016$ m) sastoji se od tri ravna traga, od jednog krivudavog traga (51 μ) s malenom gustoćom zrna i od traga atomskog ostatka, koji je zašao gotovo vertikalno u dubinu sloja. Krivudavi trag ušao je položito u emulziju iz uzduha. Gustoća zrna očevidno raste u njemu prema ishodištu zvijezde; prosječno je $\delta = 3{,}1$ μ. Prema ovim karakteristikama, slika se ima interpretirati tako, da krivudavi trag pripada negativnom σ-mezonu (po klasifikaciji Powella i Occhialinia), koji je ušao u laku jezgru i proizveo dezintegraciju.

Interpretacija sl. 13 (Tabla V, $h = 1016$ m) nije sigurna zbog dugog krivudavog traga (348 μ). Ovaj trag, kao i drugi dugi trag (310 μ), koji je samo slomljen, zakrivljen je i u vertikalnoj ravnini. Srednja gustoća zrna na oba je traga podjednaka, a porast gustoće prema kraju krivudavog traga pokazuje, da on pripada čestici, koja je izletjela iz ishodišta zvijezde. Zbog velike krivudavosti trag sliči na trag mezona, dok po gustoći i izbojcima iz njega odgovara protonu. — Ova je dezintegracija zanimljiva i zbog toga, što su u njoj dva neutrona, koji su izletjeli iz ishodišta, označili svoje staze odbačenim protonima. To je dosta rijedak slučaj. U sl. 13 *a* prikazan je srednji dio zvijezde u dva puta većem povećanju (77,5 × 6 ×), tako da se tragovi odbačenih protona jasno razabiru. Možda pojedinačni kratki protonski trag nešto ispod pravca staze desnog neutrona također označuje neutronsku stazu. Pravci dviju neutronskih staza naznačeni su tušom na rubovima slike.

---

37) P. Auger, J. Daudin i dr., C. R. **226**, 169, 569, 1948.
38) A. I. Alichanian a. A. I. Alichanow, Nature **163**, 761, 1949.
*) H. Maier-Leibnitz, ZS. f. Phys. **112**, 569, 1939, str. 577, 578.
) T. H. Johnson a. R. P. Shutt, Phys. Rev. (2) **61, 380, 1942.
***) D. J. Hugues, Phys. Rev. (2) **69**, 371, 1946.

5. Zakrivljene staze

U zvijezdama atomskih dezintegracija kozmičkim zrakama vrlo često susrećemo zakrivljene tragove čestica. Ne mislimo pod tim na slomljene tragove, koji jedan put naglo mijenjaju svoj smjer, jer je čestica u prolazu kroz emulziju prišla preblizu jezgri teškog atoma (Ag ili Br) i bila otklonjena. Radi se o tragovima, koji već od ishodišta zvijezde pokazuju više-manje konstantnu zakrivljenost u istom smislu. Takvih zakrivljenih staza s velikim polumjerom zakrivljenosti, nalazimo katkada i među tragovima pojedinačnih protona osrednje brzine (dužine tragova oko 300 μ), a susrećemo ih ne baš tako rijetko među stazama alfa zraka iz RdTh i njegovih sljednika u pločama natopljenim rastopinom torijeva nitrata. Tako zakrivljene tragove alfa zraka u fotografskoj ploči opažao je već Reinganum[39]), a nalazili su ih također Misovski i Čišov[40]). Zakrivljenih protonskih tragova ima već u najstarijim snimkama zvijezda dezintegracije s velikom energijom kod drugih autora*).

Zakrivljene tragove nalazimo osobito često u zvijezdama s malenom energijom, koje bi uz pretpostavku, da se radi o totalnim dezintegracijama, trebalo pripisati dezintegracijama lakih atoma iz emulzije ili iz njezine neposredne okolice. Prema gustoći i debljini zrna takvi zakrivljeni tragovi pripadaju protonima, tritonima, alfa česticama, a po brojnosti napose se među njima ističu tragovi, u kojima gustoća i debljina zrna upućuju na čestice s nabojnim brojevima iznad 2. U pojedinim zvijezdama nalazimo po dva ili više zakrivljenih tragova, a nerijetko susrećemo zvijezde, u kojima su tragovi zakrivljeni u suprotnom smislu.

Zakrivljenih tragova ima i u zvijezdama iz prethodnih poglavlja. Tako u sl. 2 (Tabla II) u donjoj zvijezdi zakrivljena je staza kraće alfa zrake, a u gornjoj zvijezdi su zakrivljene staze obiju alfa zraka; u sl. 4 (Tabla III) u desnoj zvijezdi zakrivljena su tri traga, sa suprotnim zakrivljenostima; u sl. 6 (Tabla IV) zakrivljena su dva protonska traga u gornjoj zvijezdi.

Tipična zvijezda sa zakrivljenim tragovima prikazana je u sl. 14 (Tabla VI, $h = 145$ m, nagib tragova ↑). Tragovi se ne sastaju, jer dolaze položito iz stakla. Sva su tri traga zakrivljena. i to lijevi krak ima gotovo konstantnu zakrivljenost, dok su srednji i desni suprotno zakrivljeni, a zakrivljenosti im rastu prema kraju traga. Po gustoći zrna lijevi trag pripada alfa zraci, desni pripada protonu, a srednji, nešto strmiji, može također pripadati alfa zraci.

---

[39]) M. Reinganum, Phys. ZS. **12,** 1076, 1911.

[40]) L. Myssovsky u. P. Tschischow, ZS. f. Phys. **44,** 408, 1927, str. 418—419.

*) N. pr.: E. Schopper, Veröff. Agfa VI. 170, 1939, sl. 7 i 8; odnosno: E. M. Schopper u. E. Schopper, Phys. ZS. **40,** 22, 1939, sl. 4 i 11.

Slična ovoj je zvijezda u sl. 15 (Tabla VI), koja također izlazi iz stakla ($h = 1016$ m). Tragovi su dosta strmi, pa u projekciji izgledaju gušćima. Po svoj prilici sva tri pripadaju protonima, ili bi gornji — uzimajući u račun i strminu — mogao biti triton ($\delta \sim 1{,}35$ μ).

U sl. 16 (Tabla VI, $h = 145$ m) oba kraka dugog, gotovo konstantno zakrivljenog traga (82 μ) silaze položito u dubinu sloja. To dopušta dvojaku interpretaciju. Može se raditi o dezintegraciji sa tri konstantno zakrivljena kraka, pri čemu su dvije čestice odletjele diametralno sa suprotnim zakrivljenostima. Protiv ovakvog tumačenja govori okolnost, da desni krak ima manju gustoću zrna na kraju staze nego u početku. Po drugom tumačenju radilo bi se o jednom protonu, kojemu je staza zakrivljena i vertikalnoj ravnini. Taj je proton, dolazeći s desna, u prividnom ishodištu zvijezde uslijed jednog sraza odbacio δ-izbojak (proton) i zbog toga je izgubio na brzini. Međutim, protiv ovog tumačenja govori okolnost, da je povećanje gustoće zrna nastalo već na desno od ishodišta.

Za vjerojatnost prve od ovih dviju interpretacija govore dezintegracije u sl. 17, 18 i 19. U sl. 17 (Tabla VI, $h = 1016$ m) oba savijena traga i ravan trag penju se dosta strmo iz emulzije (smjer nagiba ↓). Zakrivljeni tragovi imaju tako veliku gustoću zrna, da se zrnca ne dadu sa sigurnošću brojiti. Premda ih vidimo u projekciji, gustoća zrna pokazuje, da se radi o česticama s rednim brojem $z > 2$, a na to upućuje i debljina zrna. Dakle imamo dezintegraciju, gdje su dvije čestice sa $z \geq 2$ odletjele diametralno sa nasuprotno zakrivljenim stazama (8,4 μ i 12 μ). — Kratak savijeni niz zrna pored kraja protonskog traga parazitan je.

U zvijezdi prikazanoj u sl. 18 (Tabla VII) dva diametralno nasuprotna traga s nasuprotnim zakrivljenostima ukazuju gustoćom zrna na alfa česticu (lijevi trag, 20 μ) i na česticu sa $z \sim 3$ (desni trag, 12,7 μ). Dulji ravni trag (52,3 μ) je alfa čestica ili triton, a kraći je proton (30,6 μ)[41]).

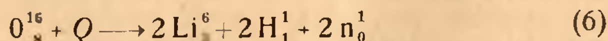
U sl. 19 (Tabla VII) projekcije dvaju tragova su diametralne; u stvari desni, kratki trag (5,8 μ, $z > 2$) zalazi strmo u dubinu sloja (smjer nagiba →, jer je ploča bila eksponirana vertikalno; $h = 1016$ m). Tu imamo pojav dezintegracije u tri teška odlomka, jer drugi diametralni trag (24 μ), koji je savijen uz konstantnu zakrivljenost, ima $z \sim 2$ ($\delta = 1{,}3$ μ), a trećem poprečnom tragu (18,2 μ), koji u emulziji teče gotovo paralelno s površinom sloja, treba pripisati $z > 3$. Opadanje debljine zrna prema kraju ovog traga pokazuje, da je čestica u svom lijetu gubila naboj popri-

[41]) Kratak niz zrna na desno od kraćeg savijenog traga parazitan je.

manjem elektrona iz okolice. Na svom kraju ovaj trag ima formaciju ostruge uslijed sraza[42]).

Još je razgovjetnija dezintegracija u gotovo same teške odlomke kod zvijezde u sl. 20 (Tabla VII, *h* = 127 m). Srednji, debeli trag (7 μ, z > 3), koji je takoder naglo gubio naboj, radioaktivan je i izbacio je naknadno dvije čestice: jedan spori proton sa zakrivljenom stazom i jedan rijedak trag od samo tri zrna, koji bi se mogao pripisati beta zraci. Kod točnijeg promatranja opaža se, da dva duga gusta, savijena traga nemaju zajedničkog ishodišta. To ukazuje na to, da se ovdje radi o dezintegraciji u dva stepena, gdje su oba procesa uslijedila u vrlo kratkom vremenskom razmaku (~ 10^{-13} sec) jedan za drugim. U prvom procesu atom se raspao u četiri dijela: u česticu sa z > 2, kojoj pripada gornji gusti trag (22 μ), koji u početku ima veliku, pa onda sve manju zakrivljenost; zatim u jedan proton vrlo malene energije (kratak trag na desno, naviše), u jednu česticu, kojoj je trag zašao vrlo strmo u dubinu (neposredno uz kratki protonski trag) i u odbojni fragmenat, kojemu pripada spomenuti debeli trag. Odmah 10^{-13} sec kasnije taj je odbojni fragmenat izbacio drugu tešku česticu, kojoj pripada donji gusti trag (30,5 μ) sa konstantnom zakrivljenošću. I toj čestici pripada nabojni broj z > 2, po svoj prilici z = 3; osim po velikoj gustoći zrna δ = 1,27 μ, to se vidi i po kratkim izbojcima uzduž traga. Ova posljednja pojedinost pokazuje, da je početna kinetička energija čestice iznosila ~ 20 MeV.

Sl. 21, *a*, *b* (Tabla VII, *h* = 1016 m) pokazuje dva suprotno zakrivljena protonska traga i dva suprotno zakrivljena traga teških čestica s nabojnim brojevima z > 3. Ishodište zvijezde leži u dubini, gdje je iz prvobitnog atoma izletio u dubinu i jedan spori proton, kojemu se trag nazira u sl. 21 *b*. Tragovi teških čestica, savijeni i u vertikalnoj ravnini, dolaze strmo iz dubine (smjer nagiba ↓). Zato je zvijezda snimljena u dva nivoa, kojima odgovaraju slike 21 *a* i 21 *b*. Može se uzeti, da desni protonski trag, koji bi se po svom smjeru teško dao koordinirati istom ishodištu, ne pripada ovoj zvijezdi, već da je odbačen od neutrona, koji je izletio iz istog ishodišta kod dezintegracije. Onda bi se ova zvijezda, ako se za teške čestice uzme z = 3, dala pripisati dezintegraciji glavnog kisikova izotopa po ovoj shemi:



$$O^{16}_{8} + Q \longrightarrow 2\,Li^{6}_{3} + 2\,H^{1}_{1} + 2\,n^{1}_{0} \qquad (6)$$

I ovdje uzimamo, da je dezintegracija izazvana brzim neutronom, koji je izletio, a ostavio je u jezgri energiju $Q < 30$ MeV.

Sličnom tipu pripada i dezintegracija u sl. 22 (Tabla VII, *h* = 1016 m), gdje je staza samo jednog od teških atomskih

[42]) I ovdje je parazitan nejasni niz zrna na lijevo od najkraćeg traga.

odlomaka (z ~ 3) zakrivljena, dok je staza drugog teškog atomskog odlomka (z > 3) slomljena jednokratnim otklonom za oko 40°.

Prema nabojnim brojevima odlomaka treba pripisati dezintegraciji glavnog kisikova izotopa i zvijezdu prikazanu u sl. 23 (Tabla VII, *h* = 1016 m). Očevidno se radi o dezintegraciji u dva stepena, i ako je interpretacija u pojedinostima nesigurna zbog tanke spojne crte između oba ishodišta. Debeli savijeni trag (12 μ) zalazi dosta strmo u dubinu sloja; drugi od njega — brojeći protiv smjera gibanja kazaljke na uri — protonski trag (21 μ) penje se položito prema površini sloja, dok su ostali tragovi horizontalni. Treba uzeti, da je prvi proces dezintegracije nastao u ishodištu debelog traga (z = 3). Toj dezintegraciji pripadaju: taj debeli trag, oba protonska traga lijevo od njega i kratka slabo zaposjednuta spojnica (~ 4 μ). Ova spojnica završuje na drugom kraju T-raspadanjem u dvije nejednake čestice. Od ovih je lijeva — prema gustoći zrna (δ = 1,45 μ) — alfa čestica s uzdušnim ekvivalentom 2,83 cm, a desni trag je protonski. Prema tome, toj spojnici treba pripisati nabojni broj z = 3, premda je samo protonski zaposjednuta.

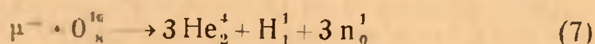
Ovakvi spojni tragovi s malenom gustoćom zrna, koji spajaju dva uzastopna raspadanja, već su prije zapaženi; ali nijesu dovoljno objašnjeni[43]). Čini se, da takav spojni trag s malenom gustoćom zrna treba tumačiti tim, da je atomski odlomak, kojemu taj trag pripada, bio od početka dejoniziran dvama elektronima, tako da je djelovao samo jedan naboj jezgre. — Međutim, nezavisno o ovom tumačenju, konačni zbroj nabojnih brojeva daje 8, pa bi po tome ova dezintegracija pripadala kisikovu atomu.

Sl. 24 i 25 (Tabla VIII, obje na *h* = 1016 m) prikazuju dvije zvijezde dezintegracije lakih atoma, koje su i u pojedinostima tako slične, da ih treba smatrati posebnim tipom dezintegracije. Na prvi pogled velike su razlike u zaposjednutosti tragova, jer se čini, da sl. 25 znatno zaostaje gustoćom zrna za sl. 24. Ali to je samo prividno. Tragovi u sl. 25 imaju poprečno iste gustoće zrna kao korespondentni tragovi u sl. 24; samo je debljina zrna u sl. 25 zbog fadinga znatno manja. Osim pojedinosti, da obje zvijezde imaju po dva traga alfa čestica zakrivljena u istom smislu, upada u oči magloviti, kratki i debeli trag, koji leži poprijeko preko dvaju gornjih tragova. U sl. 25 taj poprečni trag izlazi iz gustog i strmog traga, koji se privio uz početak gornjeg (protonskog) traga. Gustoća srednjeg traga u sl. 24 povećana je strminom staze. Po svemu se vidi, da se i ovdje radi o dvostepenoj dezintegraciji; samo spojni trag dezintegracije leži vrlo strmo prema sloju. Vjerojatno je, da je to isti tip de-

[43]) S. Tamburino, Phys. Rev. (2) 69, 35, 1946, sheme VII i VIII.

zintegracije kao onaj u sl. 26 (Tabla VIII, $h = 1016$ m), gdje je spojni trag obiju dezintegracija horizontalan. Slično kao u sl. 23, treba i ovoj spojnici pripisati nabojni broj 3, jer su u drugoj dezintegraciji iz nje izletjeli jedan proton i jedna alfa čestica. Kratkom debelom tragu, koji izlazi iz ishodišta prve dezintegracije naviše, treba pripisati nabojni broj 2, jer mu je veća gustoća izazvana strminom. Onda i ovdje zbroj nabojnih brojeva iznosi 7, a toliko iznosi zbroj nabojnih brojeva i u sl. 24 i 25.

Kako su zvijezde pretežno prouzročene neutronima, bilo da je ovaj uhvaćen od jezgre ili da je izletio iz nje, mogla bi se postaviti shema dezintegracije dušikova atoma po ovom tipu. U tom bi se slučaju prije radilo o dezintegraciji uhvaćenim neutronom, jer zvijezde u sl. 24 i 25 pokazuju izričito prevlađivanje impulsa na desno. Međutim, može se raditi i o dezintegraciji uhvaćenim sporim negativnim mezonom, ako se uzme, da je bilo izbačenih i neutrona. Takav je mezon mogao upasti jako strmo, pa mu je trag ostao ne primjećen. Pretpostavimo li, da sheme Lukirskog i Perfilova vrijede i za slučaj dvostepene dezintegracije, onda bi sl. 24 do 26 odgovarale njihovoj prvoj shemi za dezintegraciju kisikova atoma[44]):



$$\mu^- + O^{16}_8 \rightarrow 3\,He^4_2 + H^1_1 + 3\,n^1_0 \qquad (7)$$

Radi boljeg očuvanja zakona o održanju veličine gibanja, moglo bi se pretpostaviti, da su neutroni izletjeli u prostornom sektoru nasuprotnom vidljivim tragovima. U sl. 25 zaista se opaža u tom sektoru jedan vrlo strmi trag, koji bi se dobro dao pripisati protonu odbačenom jednim od tih neutrona.

U sl. 27 (Tabla VIII, $h = 1016$ m) imamo primjer jedne dezintegracije u četiri teška odlomka i jedan proton; od teških odlomaka tri su zakrivljena. Osim dvaju pobočnih, jače zakrivljenih tragova, koji su zakrivljeni i u vertikalnoj ravnini tako da su im krajevi znatno strmi, ostali su tragovi više-manje horizontalni. Malena gustoća zrna ($\delta = 2{,}9\ \mu$) u razmjerno kratkom protonskom tragu, koji završuje u emulziji, upućuje na znatan fading latentne slike. To olakšava prosuđivanje nabojnih brojeva ostalih tragova; jer na ovima malena debljina zrna ne odgovara velikoj gustoći zrna, koju pokazuju. Najmanju gustoću zrna nalazimo na lijevom pobočnom tragu; a tu je srednji razmak zrna 1,1 do 1,2 μ. U ostalim trima tragovima ne dadu se zrna brojiti. Uzmemo li, da se radi o totalnoj dezintegraciji, pa ako pripišemo trima teškim odlomcima nabojni broj 3, a jednome 2; ili ako svima teškim odlomcima pripišemo nabojni broj 3, u jednom i u drugom slučaju zbrojevi nabojnih brojeva odgovaraju elementima, kojih nema u emulziji (Mg, Al). Pripišemo li lijevom pobočnom

[44]) P. I. Lukirskij i N. A. Perfilov, DAN **54**, 219, 1946.

tragu nabojni broj 3, a ostalim debelim tragovima 4, zbroj nabojnih brojeva (16) daje nabojni broj sumpora, kojeg prema Allenu nešto ima u želatinu. Kad smo tim trima tragovima pripisali nabojni broj 4, uzeli smo u obzir fading; jer on najprije umanjuje debljinu zrna. Da bismo procijenili energiju zvijezde, uzet ćemo za sva četiri odlomka početnu brzinu 1 . 10^9 cm . sec^{-1}. Onda dobivamo za energiju zvijezde 20 MeV.

Cijepanje u četiri atomska odlomka s još većim nabojnim brojevima imamo u sl. 28 (Tabla VIII, $h = 1016$ m). Svi su tragovi horizontalni, osim gornjeg, najkraćeg traga, koji je (u projekciji) gotovo diametralan s naglo savijenim tragom, iz kojeg je izletio proton. Taj najkraći trag ide strmo u dubinu. I spomenuti protonski trag zašao je u dubinu; prema tome, nije nastavak savijenog traga. Zrnca su u svim tragovima tako gusto nanizana, da ih se ne da razlučiti. Dužine tragova idu od 4 μ do 7,6 μ. Energija ove zvijezde ima isti red veličine kao energija prethodne.

Sl. 29 i 30 (Tabla VIII, $h = 145$ m) sadrže istu pojedinost za koju je teško naći pouzdanu interpretaciju. U sl. 29 kratki zakrivljeni trag, koji je zakrivljen i u vertikalnoj ravnini, a gustoćom zrna bliže stoji $z = 3$ nego alfa zraci, naglo je izgubio gustoću i nastavlja se tangencijalnim pravcem u ravan trag s gustoćom, koja odgovara protonu osrednje brzine. Isto tako, u sl. 30 zakrivljeni trag s gustoćom zrna alfa zrake naglo je izgubio gustoću i nastavlja se tangencijalno u ravan trag s gustoćom, koja odgovara tritonu ili sporom protonu. Međutim, i u sl. 29 i u sl. 30 opažamo pojavu naglog pada gustoće također na ravnim tragovima. U sl. 29 iz ishodišta zakrivljenog traga izlazi naviše kratak, dosta gust trag, koji se nastavlja u kratak protonski trag. U sl. 30 iz ishodišta zakrivljenog traga izlaze dva kratka, gotovo diametralna traga s gustoćom zrna nešto većom od one, koja pripada sporim alfa zrakama; oba se traga nastavljaju u svojim pravcima tragovima protona osrednje brzine. Za dopunu podataka o sl. 30 treba još nadodati ovo. Kratak protonski trag, koji se ukrštava sa zakrivljenim tragom, izašao je iz istog ishodišta; ali on prolazi znatno iznad zakrivljenog traga. U jednoj i u drugoj slici tragovi leže više ili manje koso prema horizontali; zato su oštrine slika podešene tako, da su dobiveni oštrima što veći dijelovi zakrivljenih tragova, koji su bili najinteresantniji dijelovi obiju slika.

Za tumačenje ovog pojava moglo bi se pomisliti na isti pojav kao kod zakrivljenog traga u sl. 28, gdje je iz kraja tog traga naknadno izletio jedan proton. Ali tim ne bi bila objašnjena činjenica, da se ovdje, i to toliko puta, protonski (odnosno tritonski) trag nastavlja tačno pravcem gušćeg traga. Moglo bi se misliti na to, da se u svima ovim slučajevima radilo o vrlo nestalnim česticama kao biprotonu ili Li_3^5, koji su se još u svom lijetu raspali izbacujući proton; ali tu je opet ista poteškoća s pravcem izbacivanja.

Postoji i ta mogućnost, da su se oba puta ishodišta dezintegracije posve slučajno našla u vrlo uskim, oštro omeđenim područjima nehomogenosti emulzije, gdje su zrnca srebrnog bromida bila mnogo gušće razbacana, ili da je tu ploča imala veću osjetljivost, pa je to urodilo povećanjem gustoće tragova. Ali tim se ne tumači gubitak zakrivljenosti kod zakrivljenih tragova.

Napokon postoji treća mogućnost u pretpostavci, koja je već bila primijenjivana, naime da se u svim ovim slučajevima radi o parcijalnoj deionizaciji prvobitne čestice hvatanjem elektrona. Tim se da bolje tumačiti i nestanak zakrivljenosti. Poteškoća je u čestoći pojava u istoj zvijezdi.

O uzrocima zakrivljenosti. Pitanje je, kojem se uzroku ima pripisati zakrivljivanje staza u tako velikoj frekvenciji.

Michl[45]), kod prvih početaka registracije alfa zraka na fotografskoj ploči, pripisivao je savijene staze nejednakom stezanju želatina kod sušenja, a dijelom Coulombovim otklonima, koji inače izazivaju rasipanje paralelnog mlaza alfa zraka *(scattering)*. Misovski i Čišov[46]) ističu, da su zakrivljene staze alfa čestica savijene u luk više-manje konstantne zakrivljenosti, a oni ih nalaze ne samo pri rubovima fotografske ploče, gdje djelovanje nejednolikog sušenja želatina najjače dolazi do izražaja, nego i oko sredine ploče.

Od tada se zakrivljene staze općenito pripisuju djelovanju mnogostrukog rasipanja Coulombovim silama na jezgrama atoma, mimo kojih je korpuskula proletjela. Gotovo ni ne treba napominjati, da u primjerima, koji su ovdje prikazani, gdje zakrivljenosti počinju odmah od ishodišta zvijezde, a susjedni tragovi često imaju suprotne zakrivljenosti, tumačenje pomoću nepravilnog stezanja želatina ne može doći u obzir.

Teški atomski fragmenti sa $z \geqq 3$ su zbog velikog električkog naboja lako podvrgnuti povećem rasipanju u jednom jedinom elementarnom procesu. Kako je vjerojatnost otklona proporcionalna sa kvadratom nabojnih brojeva korpuskule i jezgre, koja otklanja, za poveće jednokratne otklone takvih fragmenata u fotografskoj emulziji dolaze u obzir samo jezgre srebra i broma. Takav otklon može iznijeti velik kut, a da odbojni trag teške jezgre ne bude vidljiv, zbog velike moći kočenja, koju posjeduje emulzija.

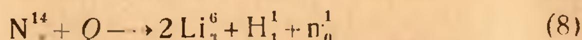
Osim sl. 22, gdje smo se već susreli s jednokratnim otklonom teške čestice za kojih 40^0, imamo analogan slučaj u sl. 2, gdje je u donjoj zvijezdi staza alfa čestice dobila jednokratni

[45]) W. Michl, Wiener Ber. **121**, 1431, 1912. — St. Meyer u. E. Schweidler, Radioaktivität, izd. 1916, str. 184. — K. W. F. Kohlrausch, Radioaktivität (Wien-Harms, Handb. Exper.-Phys.. XV), str. 488.

[46]) Myssowsky u. Tschischow, l. c. 40), str. 418—419.

otklon također za oko 40°. U gornjoj zvijezdi u istoj slici drugi desni proton pokazuje otklon za neko 10°.

U sl. 31 imamo (Tabla IX, $h = 1016$ m) pred sobom izvanredan slučaj, gdje su dva teška fragmenta dobila jednokratne otklone od kojih 70° (računajući s kosim položajem ravnina otklona). Sva tri kraka zvijezde jako su nagnuta prema horizontali, pa bi se slomljenim tragovima teško moglo pripisati nabojni broj veći od 3, premda su zrna tako gusta, da ih se ne može brojiti. Za treći, lako svinuti trag uzimamo zbog njegove strmine, da pripada sporom protonu. Kako se radi o dezintegraciji s malenom energijom, nesimetričan položaj ovog trećeg traga upućuje s obzirom na zakon o održanju veličine gibanja na pretpostavku, da je u sektoru između ovog traga i lijevog slomljenog traga mogao izletjeti jedan neutron. Prema tome, zbroj nabojnih brojeva iznosi 7. Uz pretpostavku, da je dezintegraciju prouzročio neutron, koji nije ostao u jezgri, zvijezda predstavlja dezintegraciju jednog dušikova izotopa. Identificiramo li slomljene tragove sa Li^6_3 onda bi se radilo o glavnom izotopu po shemi:



$$N^{14}_{7} + Q \rightarrow 2\,Li^{6}_{3} + H^{1}_{1} + n^{1}_{0} \tag{8}$$

Ova se interpretacija čini najvjerojatnijom. Pretpostavimo li, da nije bilo emitiranog neutrona, onda bi se dezintegracija odnosila na dušik, ako uzmemo, da je treći trag — zbog njegove znatne gustoće — pripadao deutonu (N^{14}_{7}) ili tritonu (N^{15}_{7}).

Karakteristika je mnogostrukog rasipanja, da je ono rezultat velikog broja malenih elementarnih otklona, koji su jedan od drugoga nezavisni[47]). Zbog toga za konačni otklon — kao i za rasipanje elektrona — vrijedi u prvoj približnosti G a u s s o v zakon raspodjele pogrešaka. Odatle izlazi, da je trajno zakrivljivanje jedne staze u jednom te istom smislu dosta nevjerojatno. B o t h e[48]) je to pokazao za staze beta zraka, a uglavnom isto vrijedi i za teške korpuskule sa $z > 1$. Tim većma je nevjerojatno takvo zakrivljivanje uz konstantnu zakrivljenost. Očito je, da je taj rezultat u pogledu vjerojatnosti nezavisan o tome, da li se za pojedinačni elementarni otklon uzima stara R u t h e r f o r d-nova formula, ili će se uzeti novija M o t t ova[49]), ili najnovija S e x l ova[50]), koje uzimaju u obzir i ne-C o u l o m b ske sile u neposrednoj blizini jezgre. U fotografskoj emulziji rasipanje nastaje pretežno na lakim atomima, pa zato ove dvije formule mogu ovdje bolje odgovarati od R u t h e r f o r d ove.

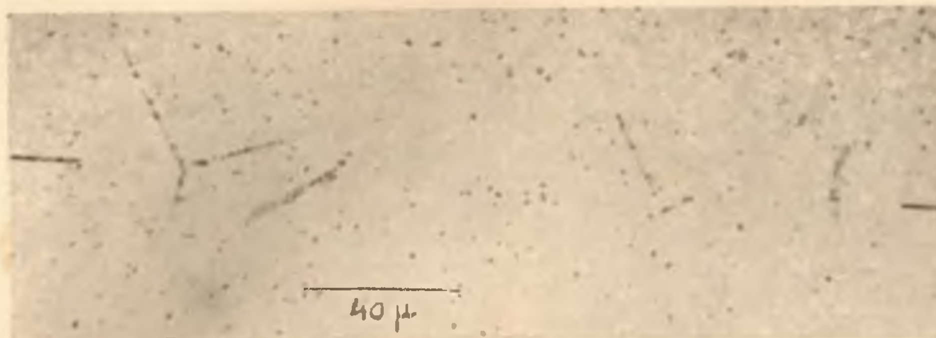
---

[47]) W. B o t h e, ZS. f. Phys. **12**, 117, 1923.

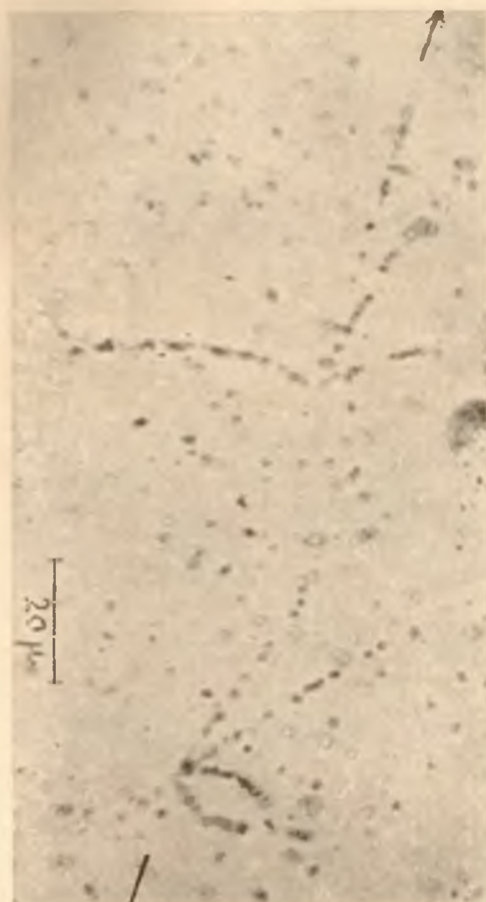
[48]) W. B o t h e, Phys. ZS. **23**, 416, 1922. — W. B o t h e, Handb. d. Phys. (G e i g e r - S c h e e l), XXII/2, 2. izd. (1933), str. 20.

[49]) N. F. M o t t, Handb. d. Phys. (G e i g e r - S c h e e l), XXIV/1, 2. izd. (1933), str. 824.

[50]) Th. S e x l, Acta Phys. Austr. **1**, 178, 1947.



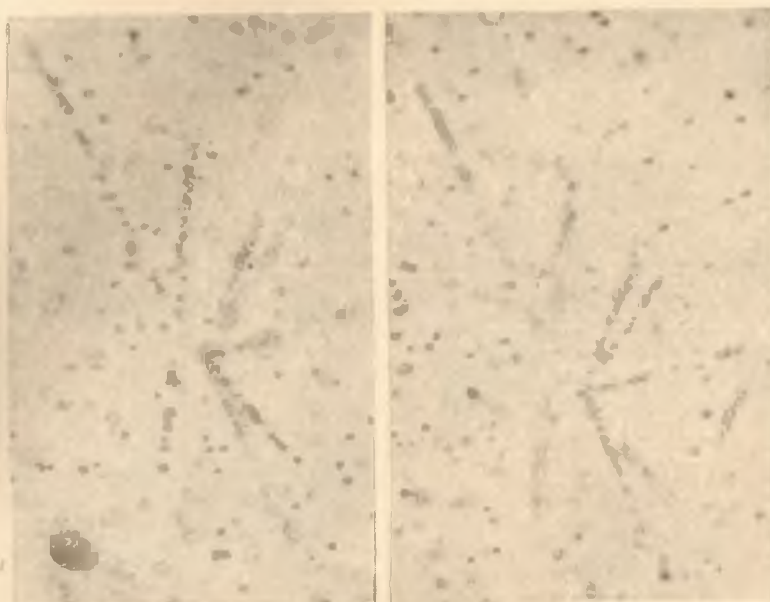
Sl. 1. Povećanje 260×2×



Sl 2. Povećanje 275×3×

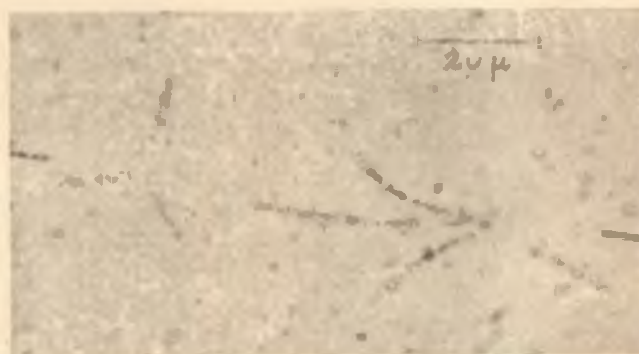


Sl. 3. Povećanje 260×3×



a *b*

Sl. 5. Povećanje 275×3×



Sl. 4. Povećanje 275×3×



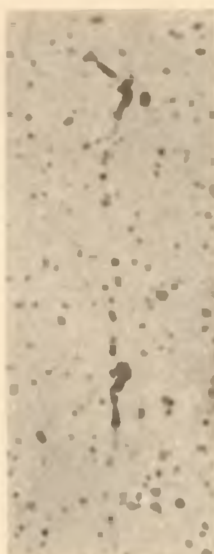
Sl. 7. Povećanje 275×8×



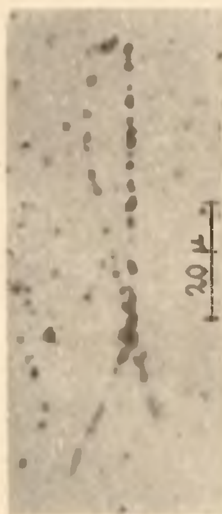
Sl. 6. Povećanje 275×8×



Sl. 8. Povećanje 275×8×



Sl. 11. Povećanje 275×2×



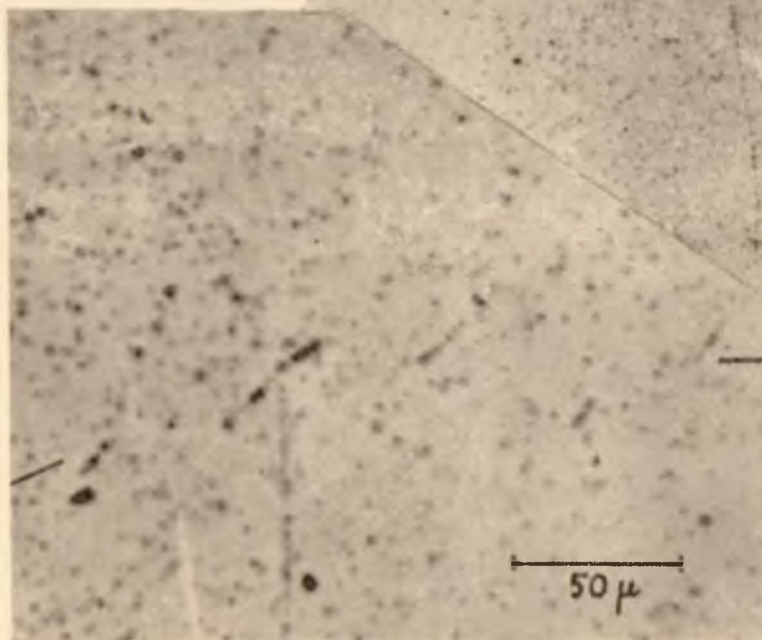
Sl. 12. Povećanje 250×8×



Sl. 9. Povećanje 275×2×



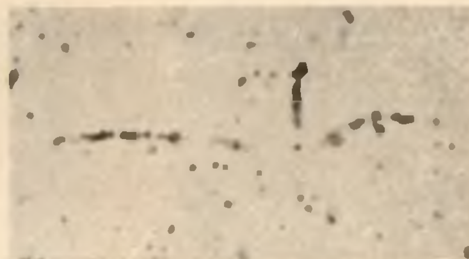
Sl. 13. Povećanje 77.5×8×



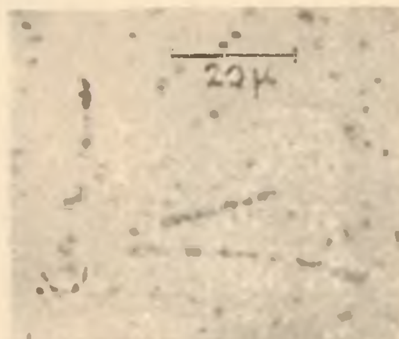
Sl. 13 a Povećanje 77,5×8×



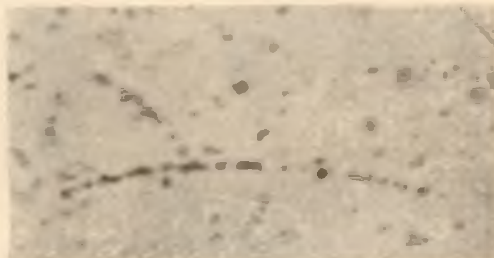
Sl. 10.
Povećanje
275×2×



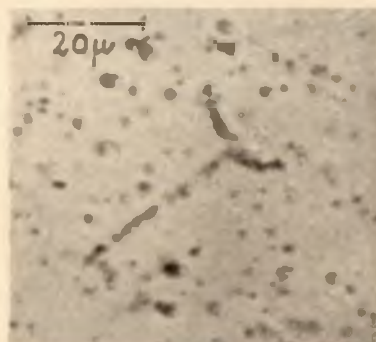
Sl. 14. Povećalne 275×3×



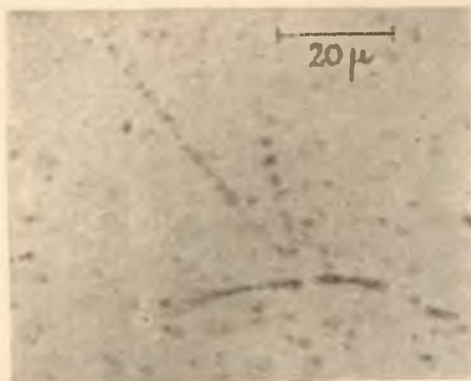
Sl. 15. Povećanje 275×3×



Sl. 16. Povećanje 275×3×



Sl. 17. Povećanje 2?0×3×



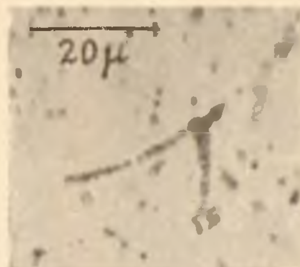
Sl. 18. Povećanje 200×8×



Sl. 21a i b. Povećanje 275×3×



Sl. 23. Povećanje 275×3×



Sl. 19. Povećanje 275×3×



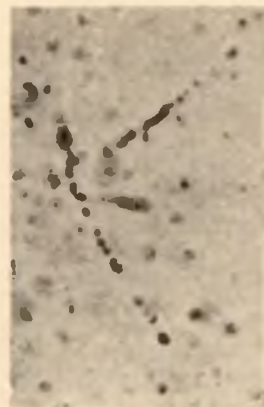
Sl. 20. Povećanje 275×3×

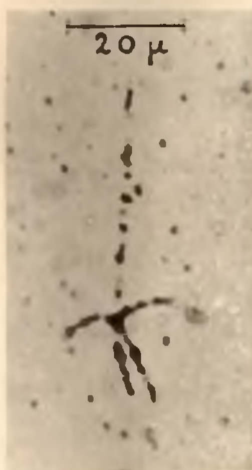


Sl. 22. Povećanje 275×3×

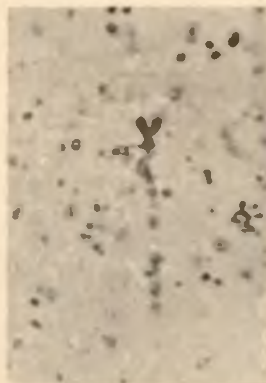

Sl. 24. Povećanje 275×3×


Sl. 25. Povećanje 275×3×


Sl. 26. Povećanje 275×3×



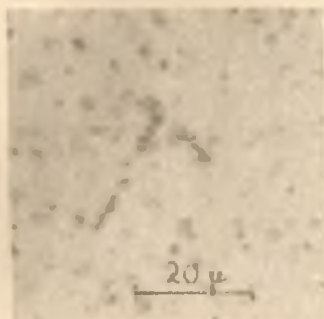
Sl. 27. Povećanje 260×3×


Sl. 28. Povećanje 275×3×


Sl. 29. Povećanje 275×3×



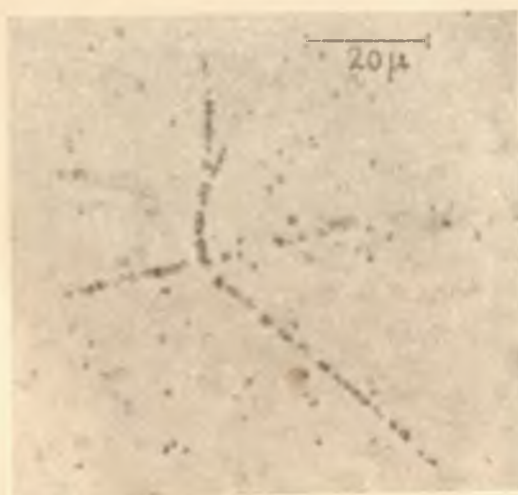
Sl. 30. Povećanje 275×3×



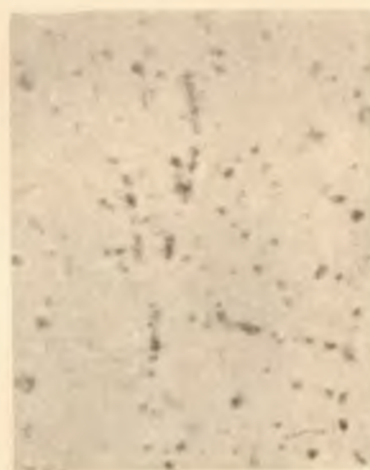
Sl. 31. Povećanje 260×3×



Sl. 32. Povećanje 275×3×



Sl. 33. Povećanje 275×3×



Sl. 34. Povećanje 260×3×



Sl. 35. Povećanje 77,5×3×



Sl. 36. Povećanje 275×3×

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ПРИЛОГ КОН ГЕОМЕТРИЈАТА НА ТРИАГОЛНИКОТ

(Примено на 17 октомври 1949 год.)

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ПРИЛОГ КОН ГЕОМЕТРИЈАТА НА ТРИАГОЛНИКОТ

При изучувањето на геометриските фигури ние применуваме различни методи. Додека се геометриските методи неопределени, аналитичките се гломазни, така да се и поред својата потполност тешко употребливи. Предноста пак на тука употребената векторска метода е таа, што служејќи се со простиот апарат на векторското сметане, со успех ги решава некои од особините на рамните фигури. Предмет на оваа работа е да покаже, како со векторскиот метод се добиваат некои веќе познати метрички релации при триаголник со директно решавање, без да се познаваат некои други особини и релации, кои би биле за геометрискиот метод неопходни.

Во првиот дел на оваа расправа изведуваме некои претходно познати формули потребни за понатамошните пресметувања.

Во другиот дел ги изведуваме метричките релации со векторскиот метод. Во истата глава даваме и некои векторски релации за положајот на значајните точки во триаголникот во однос на неговите врвои.

Професорите А. Билимовиќ, Карамата и Т. Анѓелиќ ја прочитаа оваа работа и ми учинија корисни примедби за које што сум им благодарен.

I

1. Положајот на една точка во рамнина ќе биде определен по однос на некоја стална точка-пол, со помошта на вектор. Така за точките A_1 и A_2 (сл. 1) по однос на O ги имаме вектортие $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_1}$ што го определуваат положајот

на тие точки. За определување на секоја друга точка A, што лежи на правата p, и ја дели во некој познат однос k отсечката $A_1 A_2$, постапуваме по следниот начин:

$$\overrightarrow{A_1 A} = k\,\overrightarrow{AA_2} \tag{1}$$

или

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_1} = k\left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA}\right),$$

од каде што имаме

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{OA_2}}{1+k}. \tag{2}$$

Сл. 1

На релациата (2) може да и се даде уште еден облик, ако се стави $k = m_1 : m_2$

$$\overrightarrow{OA} = \frac{m_2\overrightarrow{OA_1} + m_1\overrightarrow{OA_2}}{m_1 + m_2} \tag{2'}$$

Равенката (1) ни претставува истовремено и услов за колинеарност на точките A, A_1 и A_2, кој што услов може да се напише и како

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\,\overrightarrow{OA_1} + \mu\,\overrightarrow{OA_2}\,. \tag{2''}$$

Зимајќи го во предвид (2) имаме

$$\lambda = \frac{1}{1+k}, \quad \mu = \frac{k}{1+k}$$

или собирајќи ги

$$\lambda + \mu = 1\,.$$

λ и μ ни претставуваат произволни параметри, што ја задоволуваат релациата (3) имајќи ја во предвид (2) Обратно, може да се покаже оти (2″) претставува услов за колинеарност ако е исполнет условот (3)[1].

Напоменуваме дека равенката (1) односно (2) ни претставува и равенка на права што мине низ A_1 и A_2.

---

[1]) Да се види на пример:
J. Spielrein, *Vektorrechnung*, 2. Aufl., 1926, S. 63.

2. Да ја напишеме косинусната теорема во векторски облик. Од триаголникот $OA_1 A_2$ (сл. 1) имаме

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}.$$

Дигајќи на квадрат, добиваме

$$\overrightarrow{OA_1}^2 + 2\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_2}^2 = \overrightarrow{OA_2}^2. \tag{4}$$

3. Една точка P се наоѓа во рамнината на A, B, C ако постои релацијата

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \alpha_2 \overrightarrow{OB} + \alpha_3 \overrightarrow{OC} \tag{5}$$

и кога е исполнет условот

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \tag{6}$$

Ставот го докажуваме со помошта на формулата[1])

$$\overrightarrow{OP}\left\{\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) + \left(\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}\right)\right\} = \overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) \tag{7}$$

што дава услов точката P да лежи на рамнината низ A, B и C.

Од (5) и (7) добиваме

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right)$$

што покажува дека е условот (6) неопходен. Дека е тој услов и доволен се уверуваме по следниот начин:

Од (5) и (6) имаме

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \alpha_2 \overrightarrow{OB} + \alpha_3 \overrightarrow{OC}$$

или

$$\alpha_1\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right) + \alpha_3\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}\right) = 0.$$

од каде следува дека трите вектори $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$ се компланарни т. е. точката P лежи во рамнината на останатите три[2]).

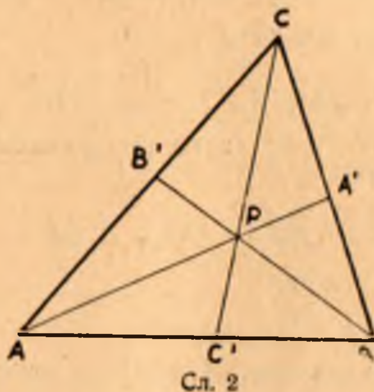
Да видиме уште какви се значењата на скаларите α_1, α_2, α_3. Трите точки A, B и C нека ни бидат врвои на

---

[1]) J. Spielrein, *Vektorrechnung*, 2 Aufl., 1926, S. 63.

[2]) Еден друг доказ на истиот став дава И. Ценов, *Свободни вектори. Сборник на Българската академия на науките и искуствата*, книга XXXVIII—1. 1942, стр 22.

еден триаголник, а точката P произволна точка од рамнината на триаголникот. Од врвоите повлекуваме прави низ P што ги сечат спротивните страни соодветно во A', B', C' (сл. 2).



Сл. 2

Врз основа на (2″) и (3) добиваме за A, P и A'

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda \overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OP}$$

или согласно (5)

$$\overrightarrow{OA} = [\lambda + \alpha_1(1-\lambda)]\overrightarrow{OA} + \alpha_2(1-\lambda)\overrightarrow{OB} + \alpha_3(1-\lambda)\overrightarrow{OC}\,. \qquad (8)$$

Но точката A' лежи и на $\overrightarrow{BC}$ па имаме

$$\overrightarrow{OA'} = \mu\overrightarrow{OB} + (1-\mu)\overrightarrow{OC}\,, \qquad (9)$$

кое упоредено со (8) ни дава

$$\lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}, \qquad \mu = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}, \qquad 1-\mu = \frac{\alpha_3}{1-\alpha_1}.$$

Со замена на овие вредности во (9) имаме

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\alpha_2\overrightarrow{OB} + \alpha_3\overrightarrow{OC}}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

или според (1) и (2′) го добиваме односот

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \qquad (10')$$

По истиот начин

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{AC'}} \tag{10''}$$

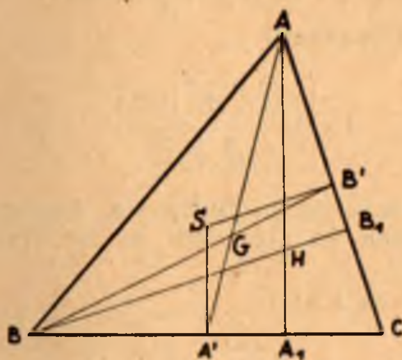
$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\overrightarrow{B'A}}{\overrightarrow{CB'}} \tag{10'''}$$

Релациите (10'), (10'') и (10''') остануваат во сила и кога ќе ги замениме векторите со нивните интензитети.

4. Пресечните точки, на висините H, на симетралите на страните S и на средните линии G се на една права и ја имаме релацијата[1])

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GS}. \tag{11}$$

Го земаме триаголникот ABC и во него точките H, G и S (сл. 3).



Сл. 3

Тогаш имаме

$$\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{A'G} + k_1\overrightarrow{HA} \tag{12}$$

и уште

$$\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{B'G} + k_2\overrightarrow{HB}$$

од каде

$$\overrightarrow{A'G} - \overrightarrow{B'G} + k_1\overrightarrow{HA} - k_2\overrightarrow{HB} = 0.$$

---

[1]) Bieberbach, *Analytische Geometrie*, 2. Aufl., 1932, S. 53.

Множејќи скаларно со $\overrightarrow{CA}$ добиваме

$$k_1 = \frac{\left(\overrightarrow{B'G} - \overrightarrow{A'G}\right) \cdot \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CA}}$$

кое што заменето во (12) дава

$$\overrightarrow{GS} = \overrightarrow{A'G} + \frac{\left(\overrightarrow{B'G} - \overrightarrow{A'G}\right) \cdot \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CA}} \cdot \overrightarrow{HA}. \tag{13}$$

По истиот начин ќе имаме

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} \tag{14}$$

и

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BH}$$

или по одземањето на овие две равенки и множењето со $\overrightarrow{CA}$ скаларно, добиваме

$$1 = \frac{\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) \cdot \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}}. \tag{15}$$

Значи ние можеме да умножиме произволна величина со десната страна на (15), без да се промени нејзината вредност.

Така имаме за (14)

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \frac{\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) \cdot \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}} \cdot \overrightarrow{AH}. \tag{16}$$

Како е пак

$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{A'G} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{B'G},$$

од (13) и (16) ја имаме бар ната релација (11).

II

5. Да ги определиме сега растојанијата на тежиштето до врвоите на еден триаголник и должините на тежишните

линии. Зимаме произволен триаголник (сл. 3) на кој што му се страните

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{b},$$

$$|\vec{a}| = a, \quad |\vec{b}| = b, \quad |\vec{c}| = c.$$

Координатите на средиштата на страните A', B', C' се дадени врз основа на (2) (за случај $k=1$), по однос на произволен пол[1]) O, со релациите

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}, \quad \overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2}, \quad \overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}. \quad (*)$$

Точката G лежи на AA' па имаме

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OA} + k\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}{2(1+k)}. \qquad (17)$$

Но она лежи и на BB', па е

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \rho\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right)}{2(1+\rho)}. \qquad (18)$$

Пресекот на овие две прави дава

$$\rho = k = 2,$$

кој што вредности заменети во (17) или (18) го даваат положајот од тежиштето на ABC

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}. \qquad (19)$$

Дека и третата тежишна линија мине низ истата точка е очигледно од (19), оти таа не зависи од A', B', C'.

Релацијата (19) може направо да се добие и од (5), заменувајки во (6) вредностите

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}.$$

---

[1]) Точката O не е уцртана

Ако земеме за пол еден од врвоите на триаголникот ABC, напр. $O \equiv A$, ќе имаме од (19)

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{3} \tag{20'}$$

и аналогно

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{3} = \frac{\vec{a} - \vec{c}}{3}, \tag{20''}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{3} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{3}. \tag{20'''}$$

Дигајќи ги на квадрат (20′), (20″) и (20‴) и земајќи ја во предвид формулата (4), ги добиваме растојанијата на тежиштето до врвоите на триаголникот

$$\overrightarrow{AG}^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \tag{21'}$$

$$\overrightarrow{BG}^2 = \frac{1}{9}(2c^2 + 2a^2 - b^2), \tag{21''}$$

$$\overrightarrow{CG}^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2), \tag{21'''}$$

кој што собрани даваат

$$\overrightarrow{AG}^2 + \overrightarrow{BG}^2 + \overrightarrow{CG}^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \tag{22}$$

Во овој случај (кога е $O \equiv A$) имаме од (*)

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

и врз основа на (20′)

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

или по дигањето на квадрат, добиваме за должината на тежишната линија

$$\overrightarrow{AA'}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \tag{23'}$$

и аналогно

$$\overrightarrow{BB'}^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2) \qquad (23'')$$

$$\overrightarrow{CC'}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \qquad (23''')$$

Papelier ги изведува[1]) истите формули со помош на векторскиот метод искористувајќи ја релацијата на Stewart.

6. Го земаме истиот триаголник и ги повлекуваме симетралите на страните. Со A', B', C' ги означуваме пресечните точки на симетралите со соодветните страни (сл. 3).

Од условот за нормалност помеѓу $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC'}$ следува

$$\overrightarrow{SC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

од каде имаме

$$\overline{SA}^2 = \overline{SC}^2 \qquad (24')$$

и по истиот начин за $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{SA'}$

$$\overline{SC}^2 = \overline{SB}^2. \qquad (24'')$$

За $\overrightarrow{SB'}$ ке имаме врз основа на (2) (за случај $k = 1$)

$$\overrightarrow{SB'} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CB'} = \frac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}}{2}.$$

Множејќи ја скаларно со $\overrightarrow{CA}$ добиваме, имајќи предвид $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}$

$$\overrightarrow{SB'} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\overline{SA}^2 - \overline{SC}^2\right) = 0. \qquad (24''')$$

Од (24′), (24″), (24‴) излегува дека се сечат сите три симетрали во една точка и дека е S на еднакво растојание од A, B и C.

Да го побараме растојанието на тежиштето G до пресекот на симетралите S.

Формулата (19) за $O \equiv S$ ни дава

$$3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$

[1]) G. Papelier, *Exercices de géométrie moderne*, t. I, 1947, p. 31

Страните на триаголникот пак се дадени со

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB},$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}.$$

Кога ќе ги подигнеме на квадрат и собериме задните четири равенки, добиваме[1])

$$9\overline{SG}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 3(\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2). \qquad (25)$$

Како е пак

$$\overline{SA}^2 = \overline{SB}^2 = \overline{SC}^2 = R^2,$$

то имаме за бараното растојание

$$\overline{SG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (26)$$

Формулата (26) може и направо да се добие дигајќи ја на квадрат равенката

$$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AG}$$

и зимајќи ја во предвид (20′), имаме

$$\overline{SG}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{AG}^2 + 2\overrightarrow{SA}\,\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}. \qquad (27)$$

Како е од друга страна според (4)

$$2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = -c^2, \qquad (28')$$

$$2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = -b^2, \qquad (28'')$$

по замената во (27) добиваме (26) Вредноста за $\overline{AG}^2$ ја зимаме од (21′).

7. Во триаголникот ABC (сл. 3) подножјата на висините нека бидат A_1, B_1, C_1 а нивниот пресек H.

За да го определиме векторот на положајот, ќе се послужиме со релацијата (5). Најнапред да ги пресметаме вредностите на α_1, α_2, α_3.

[1]) C. Laisant, *Introduction à la methode des quaternions*, 1881, p. 53

Според формулата (4) имаме

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}\,.$$

Како е пак

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA_1}$$

ќе имаме

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA_1}\,. \tag{29}$$

По истиот начин ќе добиеме

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{A_1B}\,. \tag{30}$$

Од (29) и (30) добиваме соодветно

$$\overline{CA_1} = \frac{\overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{CB}}$$

и

$$\overline{A_1B} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{CB}}$$

или по разделување

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{\overline{CB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}\,.$$

Но добиениот однос е точно односот (10′) па имаме

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}\,. \tag{31′}$$

За односите (10″) и (10‴) ќе добиеме аналогно

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2}\,, \tag{31″}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{c^2 + a^2 - b^2}\,. \tag{31‴}$$

Од задните три односа добиваме

$$\frac{\alpha_1}{\dfrac{1}{b^2 + c^2 - a^2}} = \frac{\alpha_2}{\dfrac{1}{a^2 + c^2 - b^2}} = \frac{\alpha_3}{\dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \dfrac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2}}\,. \tag{32}$$

За (5) добиваме во овој случај

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{OA}}{b^2+c^2-a^2} + \dfrac{\overrightarrow{OB}}{a^2+c^2-b^2} + \dfrac{\overrightarrow{OC}}{a^2+b^2-c^2}}{\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2} + \dfrac{1}{a^2+c^2-b^2} + \dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}}, \tag{33}$$

Ако се внесат место страните, соодвените агли, то врз основа на

$$\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

и аналогните два односа, имаме за (32)

$$\frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} A} = \frac{\alpha_2}{\operatorname{tg} B} = \frac{\alpha_3}{\operatorname{tg} C} = \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \tag{34}$$

а (33) добива вид[1])

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OA}\operatorname{tg} A + \overrightarrow{OB}\operatorname{tg} B + \overrightarrow{OC}\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}. \tag{35}$$

Ако за Oземеме еден од врвоите на ABC ќе имаме од (33)

$$\overrightarrow{AH} = (b^2+c^2-a^2)\left[(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{AB} + (a^2+c^2-b^2)\overrightarrow{AC}\right]k \tag{36'}$$

и исто така

$$\overrightarrow{BH} = (c^2+a^2-b^2)\left[(b^2+c^2-a)\overrightarrow{BC} + (b^2+a^2-c^2)\overrightarrow{BA}\right]k \tag{36''}$$

$$\overrightarrow{CH} = (a^2+b^2-c^2)\left[(c^2+a^2-b^2)\overrightarrow{CA} + (c^2+b^2-a^2)\overrightarrow{CB}\right]k \tag{36'''}$$

каде k има вредност

$$\frac{1}{k} = (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2) + (a^2+c^2-b^2)(c^2+b^2-a^2) + $$
$$+ (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2).$$

Растојанието помеѓу пресекот на височините H и тежиштето G, како и од H до пресекот на симетралите на стра-

---

[1]) И. Ценов. *Свободни вектори* (Сборник на Българската академия на науките и искуствата), кн. XXXVIII—1, 1942, стр. 34.

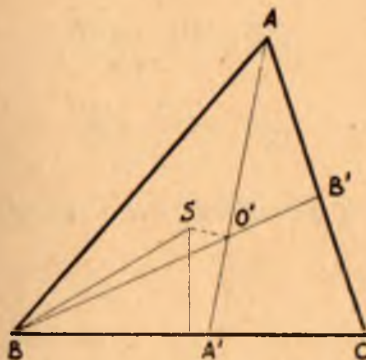
ните S ќе го најдеме со помошта на Ојлеровата релација (11). Дигајќи ја на квадрат и земајќи во превид (26) имаме

$$\overline{GH}^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \tag{37}$$

и

$$\overline{HS}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \tag{38}$$

8. Сега во триаголникот ABC (сл. 4) нека ги повлечеме симетралите на аглите и пресечните точки со спротивните страни да ги означимн со A', B', C'. Да ги побараме растојанијата на O' до A, B, C.



Сл 4

Ги зимаме уште значењата за странате од § 5.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{c}\right| = c; \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\vec{c}\right| = a; \qquad \left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\vec{b}\right| = b.$$

Врз основа на (2) ќе имаме

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}}{1+k}. \tag{39}$$

Но векторот $\overrightarrow{AA'}$ лежи и на бисектрисата на агалот помеѓу $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ па имаме

$$\overrightarrow{AA'} = n\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} - \frac{\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|}\right). \tag{40}$$

k и n претставуваат произволни скалари.

Со изедначувањето на овие две вредности добиваме

$$\overrightarrow{AB}\left(\frac{k}{1+k} - \frac{n}{2c}\right) + \overrightarrow{CA}\left(\frac{n}{2b} - \frac{1}{1+k}\right) = 0.$$

Бидејки се пак $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$ линеарно независни имаме

$$k = \frac{b}{c}, \qquad n = \frac{2bc}{b+c}. \tag{41}$$

Со замена во (39) добиваме

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{CA}}{b+c}, \tag{42'}$$

и аналогно

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{c\overrightarrow{BC} - a\overrightarrow{AB}}{c+a}, \tag{42''}$$

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{BC}}{a+b}. \tag{42'''}$$

Точката O' ќе ја добиеме како пресек на симетралите $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$.

Ќе имаме

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO'} &= s_1 \overrightarrow{AA'} \\ &= s_2 \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}. \end{aligned} \tag{43}$$

Земајќи во предвид (42′) и $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ добиваме

$$s_1 = \frac{b+c}{a+b+c}, \qquad s_2 = \frac{a+c}{a+b+c}. \tag{44}$$

Заменувајќи во (43) имаме

$$\overrightarrow{AO'} = \frac{b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{CA}}{a+b+c}. \tag{45'}$$

По истиот начин наоѓаме

$$\overrightarrow{BO'} = \frac{c\overrightarrow{BC} - a\overrightarrow{AB}}{a+b+c}, \tag{45''}$$

$$\overrightarrow{CO'} = \frac{a\overrightarrow{CA} - b\overrightarrow{BC}}{a+b+c}. \tag{45'''}$$

Подигнати на квадрат $\overrightarrow{AO'}$, $\overrightarrow{BO'}$ и $\overrightarrow{CO'}$ ни ги даваат растојанијата на O' до врвоите A, B и C

$$\overline{AO'}^2 = \frac{bc(p-a)}{p}, \qquad (46')$$

$$\overline{BO'}^2 = \frac{ca(p-b)}{p}, \qquad (46'')$$

$$\overline{CO'}^2 = \frac{ab(p-c)}{p}, \qquad (46''')$$

каде со p сме го означили скаларат $a+b+c$.

Собрани равенките (46) ни даваат

$$\overline{AO'}^2 + \overline{BO'}^2 + \overline{CO'}^2 = ab + ac + bc - 12Rr^{1)} \qquad (47)$$

Растојанието на G до O' ќе го добиеме кога ќе ги земеме во предвид (25) (за случај $S \equiv O'$) и (46)

$$\overline{OG'}^2 = \frac{1}{3}(ab+bc+ac) - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \quad 4Rr. \qquad (48)$$

Векторот на положајат на O' по однос на произволна точка O ќе го добиеме врз основа на (5). Соодвените вредности на α_1, α_2, α_3 земајќи во предвид (10) и (41) се

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{c}{a} \qquad (49)$$

или

$$\frac{\alpha_1}{a} = \frac{\alpha_2}{b} = \frac{\alpha_3}{c} = \frac{1}{a+b+c}. \qquad (50)$$

Тогаш ќе имаме[2])

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}. \qquad (51)$$

Формулите (45) можат да бидат разгледани сега како специјални случаи на (51) кога за O земаме еднонодруго A, B, C.

---

[1]) R и r се скалари, чиј вредноси се $R = \frac{abc}{4P}$, $r = \frac{P}{p}$.

[2]) Burali–Forti e Marcolongo, *Elementi di Calcolo vettoriali*, seconda edizione, p. 53.

9. Ќе ја изведеме уште релацијата што ни дава растојание d помеѓу центарот на опишаниот и центарот на впишаниот круг.

Релацијата $\overrightarrow{SO'} = \overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AS}$ (сл. 4) по дигањето на квадрат нѐ доведува до

$$\overline{SO'}^2 = \overline{AO'}^2 + \overline{AS}^2 - 2\overrightarrow{AO'}\,\overrightarrow{AS}. \tag{52}$$

Земајќи ги во предвид формулите (45) и (28), имаме

$$-2\overrightarrow{AO'}\cdot\overrightarrow{AS} = \frac{2c}{a+b+c}\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CA} - \frac{2b}{a+b+c}\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}$$

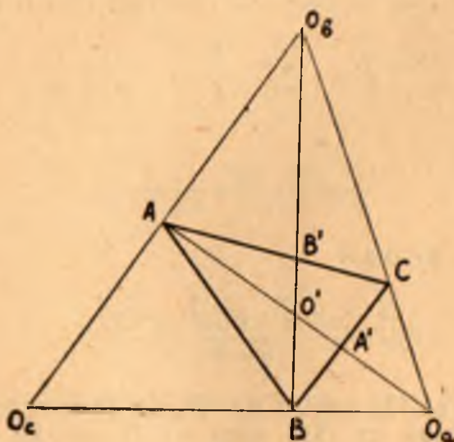
$$= -\frac{bc\,(c+b)}{a+b+c}$$

и (52) дава[1]), по замената на $\overline{AO'}^2$ од (46′)

$$\overline{SO}'^2 = d^2 = R^2 - 2Rr$$

која што ја претставува бараната формула.

10. Ако во триаголникот ABC (сл. 5) ги повлечеме надворешните бисектриси на аглите и ги побараме нивните пресечни точки, ќе имаме согласно (40)



Сл. 5

[1]) A. De Saint-Germain, *Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle*, 1926, p. 31 (овдека се изведува истата формула со помош на теоремите на Leibnitz и Lagrange за паралелни сили).

$$\overrightarrow{AO_c} = r_1 \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right) \tag{54}$$

и исто така

$$\overrightarrow{BO_c} = -r_2 \left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \right). \tag{55}$$

Од триаголникот ABO_c имаме

$$r_1 \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} \right) = \overrightarrow{AB} - r_2 \left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \right).$$

Имајќи го во предвид $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ добиваме

$$r_1 = \frac{bc}{a+b-c}, \qquad r_2 = \frac{ac}{a+b-c}, \tag{56}$$

така да (54) и (55) стануваат

$$\overrightarrow{AO_c} = \frac{b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{CA}}{a+b-c} \tag{57'}$$

$$\overrightarrow{BO_c} = -\frac{c\,\overrightarrow{BC} + a\,\overrightarrow{AB}}{a+b-c}. \tag{57''}$$

Од триаголникот пак ACO_c имаме и

$$\overrightarrow{CO_c} = \frac{a\,\overrightarrow{CA} - b\,\overrightarrow{BC}}{a+b-c}. \tag{57'''}$$

Упоредувајќи ги формулите (57) со тие од (45), гледаме дека истите можат да се добиат од нив со замена на c со $-c$. Така можеме направо да пишеме имајќи предвид (51)

$$\overrightarrow{OO_c} = \frac{a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} - c\,\overrightarrow{OC}}{a+b-c} \tag{58}$$

кое лесно се проверува.

Дигајќи ги на квадрат $\overrightarrow{AO_c}$, $\overrightarrow{BO_c}$ и $\overrightarrow{CO_c}$, ги добиваме формулите што ни ги даваат растојанијата на O_c (центарот на однадвор опишаниот круг) до врвоите A, B, C, т е..

$$\overline{AO_c}^2 = bc\frac{p-b}{p-c}, \tag{59'}$$

$$\overline{BO_c}^2 = ac\frac{p-a}{p-c}, \tag{59''}$$

$$\overline{CO_c}^2 = ab\frac{p}{p-c}. \tag{59'''}$$

Растојанието на O_c до G ке го добиеме од (25) ($O_c \equiv S$). Земајќи ги во предвид (59) добиваме

$$\overline{O_cG}^2 = \frac{1}{3}(ab - bc - ac) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\frac{abc}{p-c}. \tag{60}$$

Една циклична пермутациа во формулите (57), (58), (59) и (60) ни дава аналогни формули за останалите два центра. Така за (60) имаме

$$\overline{O_aG}^2 = \frac{1}{3}(bc - ac - ab) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\frac{abc}{p-a} \tag{60'}$$

$$\overline{O_bG}^2 = \frac{1}{3}(ca - ab - bc) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + 4\frac{abc}{p-b} \tag{60''}$$

Задиите три равенства собрани заедно со (48) ни даваат

$$\overline{O'G}^2 + \overline{O_aG}^2 + \overline{O_bG}^2 + \overline{O_cG}^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

или, зимајќи во предвид (26), ја имаме релацијата[1])

$$\overline{O'G}^2 + \overline{O_aG}^2 + \overline{O_bG}^2 + \overline{O_cG}^2 = 4\overline{SG}^2 + 12R^2. \tag{61}$$

11. Кога ќе ги помножиме (45''') со (57''') добиваме

$$\overrightarrow{CO_c} \cdot \overrightarrow{CO'} = ab \tag{62}$$

која што ни дава уште една врска помеѓу растојанијата на O' и O_c до врвоите.

Сега можеме да го најдеме и растојанието на O' до O_a O_b, O_c. Имено од

$$\overrightarrow{O'O_c} = \overrightarrow{CO_c} - \overrightarrow{CO'}$$

[1]) G. Dostor, *Distances du centre de gravité aux points remarquables du triangle* (Annales de mathématiques, 3e, série, t. II, 1883, p 270).

со дигање на квадрат и зимање во предвид формулата (62) имаме

$$\overline{O'O_c}^2 = \frac{abc^2}{p(p-c)} \tag{63'}$$

и аналогно

$$\overline{O'O_a}^2 = \frac{bca^2}{p(p-a)} \tag{63''}$$

$$\overline{O'O_b}^2 = \frac{cab^2}{p(p-b)} \tag{63'''}$$

на кој што збирот им дава

$$\overline{O'O_a}^2 + \overline{O'O_b}^2 + \overline{O'O_c}^2 = \frac{abc}{p}\left(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right). \tag{64}$$

12. Растојаниата на S до O_a, O_b, O_c ќе ги најдеме од

$$\overrightarrow{SO_c} = \overrightarrow{AO_c} - \overrightarrow{AS}\,.$$

Дигајќи ги на квадрат левата и десната страна и замајќи ги во предвид (57), (59) и (28) имаме

$$\overline{SO_c}^2 = R^2 + \frac{abc}{2(p-c)} = R^2 + 2Rr_c \tag{65'}$$

и аналогно

$$\overline{SO_a}^2 = R^2 + 2Rr_a\,, \tag{65''}$$

$$\overline{SO_b}^2 = R^2 + 2Rr_b\,, \tag{65'''}$$

кои собрани заедно со (53) даваат

$$\overline{SO'}^2 + \overline{SO_a}^2 + \overline{SO_b}^2 + \overline{SO_c}^2 = 12R^2. \tag{66}$$

Напомена: По време на коректурата излезе книгата: Ј Карамата, *Комплексан број*, Београд, Научна књига, 1950
На стр. 108 расправувани се некои прашања за кој станува збор во нашава расправа, и това користејќи ги комплексните броеви.

Математички институт
при Универзитетот во Скопје
октомври 1949

Б. С. ПОПОВ

ПРИЛОЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛНИКА

(Вывод)

Автор показывает преимущество векторной методы, употребляя ее для вывода некоторых известных метрических соотношений из геометрии плоскости.

B. S. POPOV

CONTRIBUTION À LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(Résumé)

1. Le but de cette Note est de montrer avec quel avantage on peut appliquer la méthode vectorielle à certains problèmes de la géométrie du triangle. A cet effet nous partirons de la relation

$$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \overrightarrow{OA} + \alpha_2 \overrightarrow{OB} + \alpha_3 \overrightarrow{OC} \tag{1}$$

en désignant par O l'origine, par P un point quelconque du plan du triangle ABC, et par α_1, α_2 et α_3 trois quantités scalaires, telles que

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_3 = 1, \tag{2}$$

c. à d. les coordonnées triangulaires du point P par rapport au triangle de base ABC. Il est connu (voir Spielrein {1, p. 63}) que

$$\begin{aligned} \alpha_2 : \alpha_1 &= \overrightarrow{AC'} : \overrightarrow{C'B} \\ \alpha_3 : \alpha_2 &= \overrightarrow{BA'} : \overrightarrow{A'C} \\ \alpha_1 : \alpha_3 &= \overrightarrow{CB'} : \overrightarrow{B'A} \end{aligned} \tag{3}$$

où A', B' et C' désignent respectivement les points d'intersection de la droite AP avec le côté opposé BC, etc (voir fig. 2).

2. En prenant pour P le centre de gravité G du triangle ABC, il s'ensuit, d'après (1), (2) et (3), que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3,$$

et

$$3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \tag{4}$$

c. à d. en déplaçant l'origine au point A,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

On en déduit, en tenant compte de

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

et en élévant au carré ces deux relations, que

$$\overline{AG}^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2).$$

ayant posé

$$a=|\overrightarrow{BC}|,\quad b=|\overrightarrow{CA}|,\quad c=|\overrightarrow{AB}|.$$

Par permutations circulaires, l'on en déduit les formules analogues pour $\overline{BG}^2$ et $\overline{CG}^2$, qui additionnées donnent

$$\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Etant donné que

$$2\,\overrightarrow{AA'}=3\,\overrightarrow{AG},$$

il s'en suit que le carré de la médianne AA' est donné par

$$\overline{AA'}^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2).$$

3. En déplaçant l'origine O au centre S du cercle circonscrit au triangle ABC, on aura, d'après 4), que

$$3\,\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}.$$

En tenant compte des relations

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA},$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB},$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC},$$

puis en additionnant ces quatres dernières relations, après les avoir élévées au carré, l'on en déduit (voir L a i s a n t [2, p. 50])

$$9\,\overline{SG}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2), \tag{5}$$

c à d

$$\overline{SG}^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2), \tag{6}$$

où l'on a posé

$$|\overrightarrow{SA}|=|\overrightarrow{SB}|=|\overrightarrow{SC}|=R.$$

4. En prenant dans les formules (1), (2), et 3), pour le point P l'orthocentre H du triangle ABC, étant donné que l'on a dans ce cas

$$\alpha_3:\alpha_2=(a^2+c^2-b^2):(a^2+b^2-c^2),$$

$$\alpha_1:\alpha_3=(b^2+a^2-c^2):(b^2+c^2-a^2),$$

$$\alpha_2:\alpha_1=(c^2+b^2-a^2):(c^2+a^2-b^2),$$

c. à d

$$\alpha_1 : \frac{1}{b^2+c^2-a_2} =$$

$$= \alpha_2 : \frac{1}{a^2+c^2-b^2} =$$

$$= \alpha_3 : \frac{1}{a^2+b^2-c^2} =$$

$$= 1 : \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right),$$

il s'ensuit que

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{b^2+c^2-a^2} + \frac{\overrightarrow{OB}}{a^2+c^2-b^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\overrightarrow{OC}}{a^2+b^2-c^2} \right) : \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right).$$

En tenant compte des relations entre les côtés et les angles d'un triangle, on aura

$$\frac{\alpha_1}{\operatorname{tg} A} = \frac{\alpha_2}{\operatorname{tg} B} = \frac{\alpha_3}{\operatorname{tg} C} = \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C},$$

et d'où l'on déduit que

$$OH = \frac{\overrightarrow{OA} \operatorname{tg} A + \overrightarrow{OB} \operatorname{tg} B + \overrightarrow{OC} \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

En deplaçant l'origine O au point A, il s'ensuit que

$$\overrightarrow{AH} = k (b^2+c^2-a^2 \left\{ (a^2+b^2-c^2) \overrightarrow{AB} + (a^2+c^2-b^2) \overrightarrow{AC} \right\},$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{k} = (a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2) + (a^2+c^2-b^2)(c^2+b^2-a^2) + (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$$

Par pertmutations circulaires l'on obtient les formules analogues pour $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CH}$.

Enfin, en tenant compte de la relation d'Euler

$$\overrightarrow{GH} = 2 \overrightarrow{SG},$$

il s'ensuit, d'après (6), que

$$\overline{GH}^2 = 4 R^2 - \frac{4}{9} (a^2+b^2 \quad c^2)$$

et

$$\overline{HS}^2 = 9 R^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

5. Désignons par S le centre du cercle inscrit au triangle ABC. En remplaçant dans les formules (1), (2) et (3) P par S', étant donné que A' est dans ce cas le point d'intersection de la bissectrice de l'angle en A avec le còté opposé BC, on aura

$$\overrightarrow{AA'}=\frac{b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{CA}}{b+c}$$

et

$$\frac{\alpha_1}{a}=\frac{\alpha_2}{b}=\frac{\alpha_3}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Il s'ensuit que (voir Burali-Forti e Marcolongo, p. 53)

$$\overrightarrow{OS'}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c},$$

et, en particuleir, lorsqu'on deplace l'origine O au sommet A du triangle, que

$$\overrightarrow{AS'}=\frac{b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{CA}}{a+b+c}. \tag{7}$$

De cette dernière relation l'on en déduit que

$$\overline{AS'}^2=\frac{bc\,(p-a)}{p} \tag{8}$$

où p désigne le demiperimètre du triangle ABC, et par permutations circulaires, l'on en déduit les relations correspondantes relatives à $\overline{BS'}^2$ et $\overline{CS'}^2$.

De la relation (5), en deplaçant S en S', en tenant compte de (8), l'on obtient pour la distance du centre S' du cercle inscrit au centre de gravité G la valeur

$$\overline{S'G}^2=\frac{1}{3}(ab+bc+ac)-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)-Rr. \tag{9}$$

Enfin, du fait que

$$\overrightarrow{SS'}=\overrightarrow{AS'}-\overrightarrow{AS},$$

en élévant cette relation au carré, et en tennant compte de

$$2\,\overrightarrow{AS'}\cdot\overrightarrow{AS}=\frac{bc\,(b+c)}{a+b+c},$$

l'on obtient pour distance des centres du cercle inscrit et surconscrit la valeur

$$\overline{SS'}^2=R\,(R-2r),$$

r étant le rayon du cercle inscrit.

6. En désignant par S_a, S_b, S_c les centres des cercles exinscrits opposés aux sommets A, B et C, l'on obtient par des considérations semblables les relations

$$\overrightarrow{OS_c} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - c\overrightarrow{OC}}{a+b-c},$$

$$\overrightarrow{AS_c} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{CA}}{a+b-c} \qquad (10)$$

et

$$\overline{AS_c}^2 = bc\frac{p-b}{p-c},$$

ainsi que les formules analogues relatives aux centres S_a et S_b.

Les distances du centre de gravité aux centres S_a, S_a et S_c sont données par des formules analogues à la formule (9).

Enfin, en multipliant (7) et (10), l'on obtient

$$\overrightarrow{AS_c} \cdot \overrightarrow{AS'} = bc,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de la relation

$$\overrightarrow{S'S_c} = \overrightarrow{CS_c} - \overrightarrow{CS'},$$

pour la distance des centres S' et S_c la valeur

$$\overline{S'S_c}^2 = \frac{abc^2}{p(p-c)}.$$

Par permutations circulaires l'on obtient les valeurs correspondantes pour $\overline{S'S_a}^2$ et $\overline{S'S_b}^2$ qui additonnées donnent

$$\overline{S'S_a}^2 + \overline{S'S_b}^2 + \overline{S'S_c}^2 = \frac{abc}{p}\left(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right).$$

Index bibliographique

1. Spielrein, J. – Vektorrechnung, Stuttgart, 1926.
2. Laisant, C. – Introduction à méthode des quaternions, Paris, 1881.
3. Burali — Forti et Marcolongo. – Elementi di Calcolo Vettoriali, secondo edizione.

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ ДЕТЕРМИНАНТИ ESCHERICH-ОВА ТИПА

(Примљено 17 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ ДЕТЕРМИНАНТИ Escherich-ОВА ТИПА

Нека су:

1^0 *a* и *b* два произвољна броја;

2^0 *n* један цео позитиван број.

Посматрајмо правоугаону матрицу[1] $(n, n+1)$ и означимо је са M:

$$M = \left\| \begin{matrix} n & 1 & & & & & & \\ & n-1 & 2 & & & & 0 & \\ & & n-2 & 3 & & & & \\ & & & n-3 & 4 & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & & 2 & n-1 & \\ & & & & & & 1 & n \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

У матрици M на двема нацртаним паралелним правим линијама налазе се редом природни бројеви који су поређани у два супротна смисла.

---

[1] Та матрица састоји се од n врста и $(n+1)$ колона.

Полазећи од матрице M формирајмо другу матрицу N на тај начин што ћемо матрици M дописати као *прву* врсту ове бројеве

$$a^n, \ -a^{n-1}b, \ a^{n-2}b^2, \ldots\ldots, (-1)^{n-1}ab^{n-1}, \ (-1)^n b^n. \qquad (2)$$

Експоненти потенција чија је основа a јесу:

$$n, \ n-1, \ n-2, \ldots, 1.$$

Исто тако забележимо експоненте потенција чија је основа b:

$$1, \ 2, \ 3, \ldots, n.$$

Квадратна матрица N чија је прва врста (2) има ове особине:

1° Експоненти потенција чија је основа b налазе се на кореспондентним местима на главној дијагонали матрице N;

2° Експоненти потенција чија је основа a налазе се на кореспондентним местима на дијагонали која је суседна главној дијагонали матрице N;

3° Вредност детермичанте матрице N везана је са изразом

$$(a+b)^n$$

релацијом

$$|N| = n!\,(a+b)^n.$$

Последња особина може се доказати ако се пође од Escherich-ова резултата:

Детерминанта E реда $(n+1)$:

$$E = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -y_n & x_n \end{vmatrix} \qquad (3)$$

има вредност[1]*):*

---

[1]) Видети на пример,

E. Pascal, *I Determinanti*, seconda edizione, Hoepli, Milano, 1923, p. 215.

$$
\begin{aligned}
E = a_0\, x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n \\
+ a_1\, y_1\, x_2 \ldots\ldots x_n \\
+ a_2\, y_1\, y_2\, x_3 \ldots\ldots x_n \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ a_n\, y_1\, y_2\, y_3 \ldots\ldots y_n .
\end{aligned} \tag{4}
$$

Наша детерминанта $|N|$ спада очевидно у класу детерминаната E.

У изразу (4) којим је дефинисана детерминанта (E) члан $(k+1)$-ви гласи:

$$a_k\, y_1\, y_2 \ldots y_k\, x_{k+1}\, x_{k+2} \ldots x_n$$

$$(k < n).$$

Одговарајући члан у развитку детерминанте $|N|$ има облик:

$$(-1)^k a^{n-k} b^k (-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1)(k+1)\ldots(n-1)n,$$

$\therefore$

$$(-1)^k a^{n-k} b^k (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots(n-1)n,$$

$\therefore$

$$a^{n-k} b^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots(n-1)n.$$

Посматрајмо сада вредност израза

$$\frac{1}{n!} n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots(n-1)n.$$

Последњи израз, ако се напише у облику

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(k+1)\ldots n},$$

доводи до

$$\binom{n}{k},$$

што је и требало показати.

На детерминанту $|N|$ наишли смо проучавајући једно питање из теорије обичних линеарних диференцијалних једначина.

Математички институт.
Универзитет у Скопљу

Октобар 1949

Д. С. МИТРИНОВИЧ

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ТИПА Escherich

(Вывод)

Рассматривается определитель данный в тексте на французком языке

Показатели степеней, имеющих за основу b, находятся респективно на главной диагонали этого определителя. Показатели степеней имеющих за основу a, находятся на линии параллелной с главной диагональю.

Простым вычислением показывается что значение этого определителя, принадлежащего типу Escherich,[1]) дано формулой

$$n!\,(a+b)^n.$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UN DÉTERMINANT DU TYPE D'Escherich

(Résumé)

On considère le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} a^n & -a^{n-1}b & a^{n-2}b^2 & a^{n-3}b^3 & \dots & (-1)^{n-1}ab^{n-1} & (-1)^n b^n \\ n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$$

Les exposants des puissances ayant la base b se trouvent respectivement sur la diagonale principale de ce déterminant. Les exposants des puissances ayant la base a se trouvent respectivement sur la ligne parallèle à la diagonale principale.

Un calcul simple montre que la valeur de ce déterminant, rentrant dans le type d'Escherich[1]), est donnée par la formule

$$n!\,(a+b)^n.$$

---

1) См. на пример.
E. Pascal, *I Determinanti*, seconda edizione, Hoepli, Milano, 1923, p. 215.

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О АЛГЕБАРСКИМ ИРАЦИОНАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА

(Примљено 17 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О АЛГЕБАРСКИМ ИРАЦИОНАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА

Глава прва

1. Посматрајмо једначину

$$F\left(z, \sqrt[p_1]{P_1}, \sqrt[p_2]{P_2}, \ldots, \sqrt[p_n]{P_n}\right) = 0, \tag{1}$$

где су:

1° p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots. n)$ цели позитивни бројеви[1]);

2° P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ полиноми по $z = x + iy$ чији су коефицијенти комплексни бројеви;

3° F полином по назначеним аргументима са комплексним коефицијентима.

Ако се стави

$$\sqrt[p_\nu]{P_\nu} = t_\nu \tag{2}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

једначина (1) постаје

$$F(z, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0. \tag{3}$$

Једначина (3) и једначине

$$P_\nu(z) = t_\nu^{p_\nu} \tag{4}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

чине заједно систем од $(n+1)$ једначина у којима се више не јавља ниједан израз под знаком корена.

---

[1]) Случај када су p_ν цели негативни бројеви или разломљени рационални бројеви (позитивни или негативни) своди се, очевидно, на случај који горе дискутујемо.

Елиминацијом параметра t_1 из једначина:

$$F(z, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

$$P_1(z) - t_1^{p_1} = 0,$$

по Sylvester-овој, Cauchy-евој или по којој другој методи[1]), добија се једначина

$$F_1(z, t_2, t_3, \ldots, t_n) = 0,$$

где је F_1 полином по назначеним аргументима[2]).

Ако се затим из једначина

$$F_1(z, t_2, t_3, \ldots, t_n) = 0,$$

$$P_2(z) - t_2^{p_2} = 0$$

елиминише t_2, долази се до нове једначине

$$F_2(z, t_3, t_4, \ldots, t_n) = 0,$$

где је F_2 полином по наведеним аргументима.

Продужујући тако са елиминацијом параметара

$$t_\nu \qquad (\nu = 3, 4, \ldots, n-1),$$

долази се до једначине

$$F_{n-1}(z, t_n) = 0,$$

тако да се, кад се из последње једначине и једначине

$$P_n(z) = t_n^{p_n}$$

елиминише параметар t_n, добија дефинитивно једначина

$$F_n(z) = 0, \tag{5}$$

где је F_n полином по z.

---

[1]) Видети на пример,

Б. Гавриловић, *Теорија детерминаната*, Београд, 1880, стр. 120–128;

А. К. Сушкевич, *Основы высшей алгебры*, четвертое издание, ОГИЗ, Москва—Ленинград, 1941, Глава VIII, стр. 206;

J. V. Uspensky, *Theory of Equations*, New York, McGraw-Hill, 1948, p. 277–291.

[2]) Пре него што се приступи примени једне од метода за елиминацију, могу се каткада остварити знатна упрошћавања подесним комбиновањем једначина у датом систему. Нека је на пример, дата једначина

$$z^2\sqrt{z^2+z-1}+\sqrt[3]{z+2}+\sqrt{(z^2+z-1)^3}\,\sqrt[3]{z+2} = i + z,$$

где је $i = \sqrt{-1}$.

Једначину (5) зваћемо *трансформат примитивне* једначине (1).

Према поступку којим се дошло до једначине (5) очевидно је да она садржи решења свих једначина (1), *односно једначина* (5) *обухвата све различите једначине* (1), *до којих се долази када се за назначене корене узму у обзир сва њихова значења* (детерминације). Ако смо од свих ових једначина узели једну одређену, онда треба посебно испитати која су од решења једначине (5) истодобно и решења изабране примитивне једначине која је обухваћена једначином (1).

Пример I. Дата је једначина:

$$\sqrt[3]{z-1}+\sqrt[5]{z+2}=\sqrt[7]{z^2+1}.$$

Према горњем, пишемо систем:

$$t_1+t_2=t_3,$$
$$z-1=t_1^3,$$
$$z+2=t_2^5,$$
$$z^2+1=t_3^7.$$

Овде се, једна за другом, имају извршити три елиминације.

Пример II. Полазећи од једначине

$$\sqrt[3]{z+2}-\sqrt[6]{z^2-1}=\sqrt{z+2}$$

и стављајући

$$\sqrt[6]{z+2}=t_1,$$
$$\sqrt[6]{z^2-1}=t_2,$$

Одговарајући систем (2) гласи:

$$t_1 z^2+t_2+t_1^3 t_2=i+z,$$
$$z^2+z-1=t_1^2,$$
$$z+2=t_2^3.$$

Ако t_1^2 из друге једначине уврстимо у прву, добијамо

$$t_1[(z^2+z-1)t_2+z^2]+t_2=i+z.$$

Из последње једначине и једначине

$$z^2+z-1=t_1^2$$

лако се сада елиминише t_1. Остаје још да се иза тога елиминише t_2.

добија се систем:

$$\begin{aligned} t_1^2 - t_2 &= t_1^3, \\ z + 2 &= t_1^6, \\ z^2 - 1 &= t_2^6. \end{aligned}$$

Овде треба извршити две елиминације, ма да се у датој једначини јављају три корена. Уопште, број елиминација смањиће се увек када између полинома $P_\nu(z)$ постоји релација облика

$$P_\alpha = \lambda P_\beta$$

(α, β = цели позитивни бројеви $< n$; λ = ма каква константа).

2. Каткада је подесније да се формира најпре једначина по једном од параметара t_ν. Пођимо од система дефинисаног са (3) и (4) и елиминацијом образујмо једначину у којој ће од параметара

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

фигурисати само један параметар, рецимо t_ν. По себи се разуме, да ћемо се при избору параметра t_ν задржати на оном који је најподеснији са гледишта практичности. Дакле, ако се елиминише z и параметри:

$$t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}, t_{\nu+1}, \ldots, t_n,$$

добија се једначина

$$Q_\nu(t_\nu) = 0, \qquad (6)$$

где је Q_ν полином по t_ν.

Будући да су z и t_ν везани релацијом

$$P_\nu(z) = t_\nu^{p_\nu}, \qquad (7)$$

решавање једначине (1) своди се на решавање једначина (6) и (7).

Ако је потребно формирати једначину по z, остаје још да се из једначина (6) и (7) елиминише t_ν. У случају када је:

$$P_\nu(z) = Mz + N \qquad (M, N = \text{две комплексне константе})$$

имамо Tschirnhausen-ову трансформацију и тада се елиминација параметра t_ν може извршити, на пример, Hermite-овим поступком.

3. Посматрајмо опет једначину (1) и претпоставимо сада да коефицијенти полинома F и полинома P_ν (P_ν = функција реалне променљиве x) припадају области реалних бројева.

Тада ће под

$$\sqrt[p_\nu]{P_\nu(x)} \qquad (P_\nu(x) > 0)$$

подразумева само позитивна вредност корена.

Да бисмо у овом случају решили једначину

$$F\left(x, \sqrt[p_1]{P_1}, \sqrt[p_2]{P_2}, \ldots, \sqrt[p_n]{P_n}\right) = 0, \tag{8}$$

треба претходно решити једначину (5) и испитати који од корена (решења) задовољава једначину (8) имајући у виду да корени $\sqrt[p_\nu]{P_\nu(x)}$ имају поменуто значење.

Узмимо, на пример, једначину

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x}, \qquad (x \geqslant 0). \tag{9}$$

Одговарајући систем гласи:

$$x = t_1^4,$$
$$x + 1 = t_2^3,$$
$$t_1 + t_2 = t_1^2.$$

Елиминацијом параметра t_2 из последње две једначине налази се:

$$(t_1^2 - t_1)^3 = x + 1,$$

или, у развијеном облику,

$$t_1^6 - 3t_1^5 + 3t_1^4 - t_1^3 - (x+1) = 0. \tag{10}$$

Ова једначина, с обзиром на једначину

$$x = t_1^4, \tag{11}$$

добија простији вид:

$$t_1^3 - x t_1^2 + 3x t_1 + (1 - 2x) = 0.$$

Елиминацијом t_1 из последње једначине и једначине (11) налази се

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & 3x & 1-2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 3x & 1-2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & 3x & 1-2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 3x & 1-2x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

Остаје још да се развије детерминанта која фигурише у последњој једначини, да се реши тако добијена једначина $D(x) = 0$ и да се провери да ли међу њеним решењима $x_k \geqslant 0$ има таквих која задовољавају примитивну једначину (9).

Да бисмо решили једначину (9), можемо поступити и на овај начин.

Из (10) и (11) елиминацијом x, добија се

$$t_1^6 - 3t_1^5 + 2t_1^4 - t_1^3 - 1 = 0. \tag{12}$$

Решења једначине (9) налазе се међу вредностима

$$x = t_1^4 \quad (x \geqslant 0),$$

где место t_1 треба редом стављати корене једначине (12).

4. Нека је сада дата једначина

$$\sqrt{P_1 + \sqrt[3]{P_2}} + \sqrt[3]{P_3 - \sqrt[5]{P_4}} = z + \sqrt[5]{P_5 \sqrt[3]{P_6}} \tag{13}$$

(P_ν = полиноми по z).

Ова једначина, очевидно, не спада у тип (1). Међутим, и овде може да се искористи наведени поступак за уклањање корена.

Ставимо најпре,

$$P_2 = t_2^3,$$
$$P_4 = t_4^5, \tag{14}$$
$$P_6 = t_6^{15}.$$

Једначина (13) добија облик

$$\sqrt{P_1 + t_2} + \sqrt[3]{P_3 - t_4} = z + t_6 \sqrt[5]{P_5}. \tag{15}$$

Ставимо затим:

$$P_1 + t_2 = t_1^2,$$
$$P_3 - t_4 = t_3^3, \tag{16}$$
$$P_5 = t_5^5.$$

Једначина (15) односно (13) тада постаје

$$t_1 + t_3 = z + t_5 t_6. \tag{17}$$

Ако се из релација (14), (16), (17) елиминишу параметри t_ν, добија се једначина

$$F_6(z) = 0,$$

где је F_6 полином по z.

Уопште, *свака једначина*

$$A\left(z,\ \sqrt[p_1]{P_1},\ \sqrt[p_2]{P_2},\ldots,\ \sqrt[p_n]{P_n}\right)=0, \tag{18}$$

где је A алгебарска функција назначених аргумената, може се трансформовати, применом наведеног поступка, у једначину која неће садржавати z под кореном.

5. Наведени поступак може се генералисати без тешкоћа на релације са две и више променљивих. Ради једноставности, задржаћемо се само на случају две променљиве. Нека је дата релација:

$$F\left(z_1, z_2,\ \sqrt[p_1]{P_1},\ \sqrt[p_2]{P_2},\ldots,\ \sqrt[p_n]{P_n}\right)=0, \tag{19}$$

где су P_ν полиноми по

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2,$$

и где су остале ознаке протумачене у вези са једначином (1).

Ставимо

$$P_\nu(z_1, z_2)=t_\nu^{p_\nu} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n). \tag{20}$$

Једначина (19) тада добија облик

$$F(z_1, z_2, t_1, t_2,\ldots,t_n)=0. \tag{21}$$

Избацивањем параметара t_ν из једначина (20) и (21), добија се

$$F_n(z_1 \text{ и } z_2)=0,$$

где је F_n полином по z_1 и z_2.

На сличан начин бисмо поступили, ако бисмо пошли од једначине облика (18) где је место

$P_\nu(z)$ стављено $P_\nu(z_1,\ z_2)$.

Глава друга

6. У овој расправи хтели смо само да дамо неколике примедбе о трансформацији и решавању алгебарских ирационалних једначина, а на то нас је навео овај разлог.

П. Димић скренуо нам је пажњу на то да питање о редуковању једначина облика (1) на облик

$$F(z)=0,$$

где је $F(z)$ полином по z, није довољно обрађено у литератури. Том приликом сетили смо се чланка који је Gino Loria објавио баш по истом питању[1]).

У томе чланку Loria се задржава на ирационалним једначинама специјалног облика, где се појављују само квадратни корени. Уосталом Loria и почиње овако:

Dans presque tous les traités d'algèbre élémentaire, je trouve prescrit que „pour rendre rationnelle une équation algébrique qui ne l'est pas, on doit la rendre rationnelle à l'aide d'une ou de plusieurs élévations à des puissances convenables".

Све једначине које наводи Loria улазе у тип (8), као партикуларни случајеви. Loria даје поступак који ћемо овако формулисати:

Да би се решила једна алгебарска ирационална једначина

$$f(z)=0 \tag{22}$$

а да се при томе не узме у помоћ потенцирање, треба образовати *норму* функције $f(z)$:

$$N(z)=f_1(z)\cdot f_2(z),\ldots,f_s(z),$$

где је s број различитих израза што са добијају из функције $f(z)$ када коренима, који се у овој функцији јављају, припишемо све могуће детерминације (значења); ако међу функцијама

$$f_\nu(z) \qquad (\nu=1,2,\ldots,s)$$

постоје такве две $f_\lambda(z)$ и $f_\mu(z)$ да је

$$f_\mu(z)=-f_\lambda(z),$$

тада се једна од њих не узима у обзир и број s се смањује за јединицу.

Норма $N(z)$ је рационална функција по z и нека су њене нуле

$$z_1, z_2, \ldots, z_q \tag{23}$$

(q = један природни број).

---

[1]) G. Loria, *Remarques sur les équations algébriques non rationnelles* (*Mathesis*, t. 52, 1938, p. 129—131).

De Comberousse за уклањање корена из релација препоручује метод елиминације, али је то питање само дотакао.

Видети о томе:

De Comberousse, *Cours de mathématiques*, t. IV (Algèbre supérieure, seconde partie), cinquième édition, Paris, Gauthier—Villars, 1923, p. 560—561.

Једначина

$$N(z)=0$$

обухвата сва решења дате једначине (22), као и све нуле функција

$$f_1, f_2, \ldots, f_s$$

од којих је једна и сама полазна функција $f(z)$.

За свако од решења (23) треба испитати да ли је истовобно и решење једначине (22).

Пример. Loria је свој поступак применио на једначину:

$$\sqrt{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-1}=0 \tag{24}$$

и за функцију $f(x)$:

$$f(x)=\sqrt{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-1}$$

образовао *норму*[1])

$$N(x)=9-\frac{9}{x-4}\,.$$

Стављајући

$$N(x)=0$$

добија се $x=5$, и то није решење једначине (24). Та једначина претставља пример алгебарске једначине без корена[2]). Тој чињеници даје Loria и геометриску интерпретацију.

---

[1]) Другом приликом о норми ове функције учинићемо једну примедбу. Иначе, приметимо да је наше формулисање резултата прецизније него код Loria.

[2]) Loria у истом чланку примећује да најстарије дело у коме је наведен пример алгебарске једначине без корена припада J. S. Young-у. То је: *Theory and solution of algebraical equations.* II издање тог дела објављено је 1843. На стр. 43 Young цитира једначину

$$(2x-5)+\sqrt{x^2-7}=0$$

као пример алгебарске једначине без корена. Ако се, према Loria, образује $N(z)$, добија се:

$$3x^2-20x+32=0.$$

Међутим, обадва корена те једначине задовољавају једначину

$$(2x-5)-\sqrt{x^2-7}=0\,.$$

7. У предавањима Ј. Карамате[1]), у вези са уклањањем корена из једначина, стоји:

„У колико су изрази сложенији и број корена већи, на пример, ако се у некој једначини од најмање три члана[2]) налазе два n-та корена ($n \geqslant 3$), тада се елементарним путем (без примене комплексних бројева) ових корена не можемо ослободити“.

Напред је показано да постоји и други поступак осим оног који горе предлаже у предавањима Ј. Карамата. У ствари поступак из предавања Ј. Карамате као и онај о коме говори G. Loria јесу у основи једно исто.

Вредно је компаративно проучити поступак који смо напред употребили и овај на који су само упутили G. Loria и Ј. Карамата.

8. *Пример.* Узмимо једначину:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt{z+1} + 1 . \tag{25}$$

Први поступак (елементаран).

После дизања на куб, има се

$$z = (z+4)\sqrt{z+1} + 3z + 4 ,$$

тј.

$$-2z - 4 = (z-4)\sqrt{z+1} .$$

Подизањем на квадрат налази се

$$z^3 + 5z^3 + 8z = 0 .$$

Други поступак (Loria—Карамата).

Пођимо од функције

$$f(z) = \sqrt[3]{z} - \sqrt{z+1} - 1 ,$$

[1]) Ј. Карамата, *Алгебра* I, први део, Београд, Научна књига, 1949, стр. 15.

[2]) Овде се мисли, ваљда, на пример на овакве једначине:

$$\sqrt[3]{x-7} - x = \sqrt[5]{x^2+1} ,$$

$$\sqrt[5]{x} + x^2 - x = \sqrt[7]{x^2-1}$$

или можда само на овакве:

$$\sqrt[5]{x-7} + \sqrt[5]{x^2+1} = x^2 + x - 1 .$$

и образујмо

$$f_1(z) = \sqrt[3]{z} + \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_2(z) = \varepsilon \sqrt[3]{z} - \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_3(z) = \varepsilon \sqrt[3]{z} + \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_4(z) = \varepsilon^2 \sqrt[3]{z} - \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_5(z) = \varepsilon^2 \sqrt[3]{z} + \sqrt{z+1} - 1,$$

где је

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Норма функције $f(z)$ је овде:

$$N(z) = f \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5.$$

После множења и свођења, водећи при томе рачуна да је

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

добија се

$$N(z) = z^3 + 5z^2 + 8z.$$

Резултат је сагласан са оним који је горе добијен, но примена овог поступка скопчана је са елементарним, али заметним израчунавањима.

Трећи поступак (метод елиминације).

Ставимо

$$\sqrt[3]{z} = t_1,$$

$$\sqrt{z+1} = t_2;$$

тада имамо систем

$$z = t_1^3, \tag{26}$$

$$z + 1 = t_2^2, \tag{27}$$

$$t_1 = t_2 + 1. \tag{28}$$

Елиминацијом t_2 добија се

$$z + 1 = (t_1 - 1)^2,$$

тј.

$$z = t_1^2 - 2t_1. \tag{29}$$

Из једначина (26) и (29) треба елиминисати још t_1. Једначина (26) може се написати и овако:

$$z = t_1^3,$$

$$z = t_1^2 \cdot t_1,$$

па је на основу (29)

$$z = (z + 2\,t_1)\, t_1. \qquad (30)$$

Ако се сада из (29) и (30) елиминише t_1, добија се:

$$z^3 + 5\,z^2 + 8\,z = 0. \qquad (31)$$

До решења једначине (25) може се и овако доћи. Ако се из једначина

$$z = t_1^2 - 2\,t_1,$$

$$z = t_1^3$$

елиминише z, има се

$$t_1^3 - t_1^2 + 2\,t_1 = 0,$$

одакле се налазе корени

$$0, \ \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

С обзиром на

$$z = t_1^3$$

решења за z јесу:

$$0, \ \frac{-5 \mp i\sqrt{7}}{2}, \qquad (32)$$

а то су решења једначине

$$z^3 + 5\,z^2 + 8\,z = 0.$$

Остаје још да се испита да ли су наведена решења (32) заиста решења једначине (25).

Последњи поступак изгледа најподеснији. Први се може употребити само у врло изузетним партикуларним случајевима, док је последњи (трећи) поступак употребљив у свима случајевима.

9. Од интереса је дубље проучити односе између примитивне једначине (1) и њеног трансформата (5); исто тако односе између примитивне једначине (18) и њеног трансформата.

Тако, на пример, од интереса је да се одреди степен[1]) трансформата у зависности од

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

и степена

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

респективних полинома

$$P_1, P_2, \ldots, P_n.$$

Исто тако, вредно би било навести карактеристичне случајеве, осим већ споменутих, у којима се број елиминација смањује. Ако би се могао упростити наведени алгоритам којим се долази до трансформата примитивне једначине, то би такође претстављало известан интерес.

Ми се овде нећемо бавити горе наведеним питањима. На њих само упућујемо читаоца.

Глава трећа[2])

10. У овој глави изложићемо, детаљније и потпуније, резултате наведене у § 4 ове расправе[3]). Уведимо најпре неке ознаке.

Слова:

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda;$$
$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha;$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_\beta;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_1, l_2, \ldots, l_\lambda$$

означавају целе позитивне бројеве.

---

[1]) J. Улчар прочитао је ову расправу у рукопису и приметио је следеће:

Постављени проблем да се нађе степен трансформата једначине (1) вероватно није лак, јер је решење тог проблема и за $\nu = 1$ [видети једначину (1)] прилично компликовано. За тај најједноставнији случај решење је садржано у два Minding-ова правила која је исцрпно изнео E. Netto у својој алгебри: *Vorlesungen über Algebra* (Teubner, Leipzig), Bd. 2, 1900, S. 49—60 (§§ 369—375).

[2]) Ова глава додана је накнадно, што се уосталом види и из композиције саме расправе.

[3]) J. Карамата и М. Томић прочитали су, пре штампања, ову расправу, на чему им је писац захвалан. Под сугестијом Карамате редигована је трећа глава.

Ознаке:

$$A_1,\ A_2, \ldots, A_\alpha;$$
$$B_1,\ B_2, \ldots, B_\beta;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_1,\ L_2, \ldots, L_\lambda$$

претстављају елементарне[1]) алгебарске функције комплексне променљиве z, са произвољним комплексним коефицијентима.

Ознаке

$$R(M_1,\ M_2, \ldots)$$
$$R_\nu^{(\mu)}(M_1,\ M_2, \ldots)$$
$$(\mu = a, b, \ldots, l; \quad \nu = \text{цео позитиван број})$$

претстављају рационалне функције назначених аргумената у комплексном подручју.

11. Посматрајмо алгебарску једначину

$$A(z) = 0 \tag{33}$$

у којој $A(z)$ има облик[2])

$$A(z) = R\left(z,\ \sqrt[a_1]{A_1},\ \sqrt[a_2]{A_2}, \ldots,\ \sqrt[a_\alpha]{A_\alpha}\right) \tag{34}$$

где су функције $A_\nu(z)$ дефинисане изразима:

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}\left(z,\ \sqrt[b_1]{B_1},\ \sqrt[b_2]{B_2}, \ldots,\ \sqrt[b_\beta]{B_\beta}\right) \tag{35}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Функције

$$B_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \beta)$$

које се јављају у формулама (35) дефинисане су изразима:

$$B_\nu = R_\nu^{(b)}\left(z,\ \sqrt[c_1]{C_1},\ \sqrt[c_2]{C_2}, \ldots,\ \sqrt[c_\gamma]{C_\gamma}\right) \tag{36}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

---

[1]) Под елементарном алгебарском функцијом подразумева се израз образован операцијама сабирања, одузимања, множења, дељења и степеновања рационалним бројем које су извршене, у коначном броју, са променљивом z.

[2]) Увођењем појма *реда* алгебарске ирационалне функције, унеколико би се другојаче формулисале чињенице дате у овој расправи. О томе појму видети, на пример, М. Тихомандрицкий, *Краткiй курсъ высшей алгебры*, Харков, 1887, стр. 3–5.

Функције

$$C_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \gamma)$$

које се јављају у формулама (36) дефинисане су, на аналогичан начин, помоћу функција

$$D_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \delta).$$

Продужујући тако, претпоставимо да се најзад долази до алгебарских функција

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}\left(z, \sqrt[l_1]{L_1}, \sqrt[l_2]{L_2}, \ldots, \sqrt[l_\lambda]{L_\lambda}\right) \tag{37}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

где су

$$L_\nu = R_\nu^{(l)}(z) \tag{38}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

рационалне функције промењиве z.

Уведимо параметре $t_{\nu a}$ помоћу формула

$$A_\nu = t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{39}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Тада једначина (33) постаје:

$$R(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0. \tag{40}$$

Ставимо даље

$$B_\nu = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{41}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Релације (35), према (41), добијају облик:

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}). \tag{42}$$

Ако се доведу у везу релације (39) и (42), долази се до нових релација:

$$R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{43}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Уведимо сада нове параметре $t_{\nu c}$ помоћу веза

$$C_\nu = t_{\nu c}^{c_\nu} \tag{44}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \gamma).$$

Тада релације (36), на основу (44) и (41), доводе до ових релација:

$$R_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{45}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Даљом применом наведеног поступка долази се најзад до релација

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) \tag{46}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa);$$

$$L_\nu \equiv R_\nu^{(l)}(z) = t_{\nu l}^{l_\nu} \tag{47}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

12. Наведеним поступком формиране су ове једначине:

$$\begin{aligned} & R(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0; \\ & R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = t_{\nu a}^{a_\nu} \\ & (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha); \\ & R_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = t_{\nu b}^{b_\nu} \\ & (\nu = 1, 2, \ldots, \beta); \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & R_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) = t_{\nu k}^{k_\nu} \\ & (\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa); \\ & R_\nu^{(l)}(z) = t_{\nu l}^{l_\nu} \\ & (\nu = 1, 2, \ldots, \lambda). \end{aligned} \tag{48}$$

Систем (48) састоји се из N једначина, где је

$$N = 1 + \alpha + \beta + \cdots + \lambda.$$

У систему (48) појављују се параметри t_{pq} којих има на броју

$$N - 1.$$

Пошто су

$$R \text{ и } R_\nu^{(\mu)}$$

рационалне функције, можемо ставити

$$R = \frac{P}{Q}, \quad R_\nu^{(\mu)} = \frac{P_\nu^{(\mu)}}{Q_\nu^{(\mu)}},$$

где су

$$P, Q; P_\nu^{(n)}, Q_\nu^{(n)}$$

полиноми по аргументима који ће ниже бити назначени.

Систем (48) тада добија облик:

$$P(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0;$$

$$P_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) - t_{\nu a}^{a_\nu} Q_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha);$$

$$P_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) - t_{\nu b}^{b_\nu} Q_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta);$$

.... (49)

$$P_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) - t_{\nu k}^{k_\nu} Q_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa);$$

$$P_\nu^{(l)}(z) - t_{\nu l}^{l_\nu} Q_\nu^{(l)}(z) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

13. Став. 1⁰ *Свака алгебарска једначина* (33) *може се свести на облик*

$$T(z) = 0 \tag{50}$$

где је $T(z)$ *полином по* z.

2⁰ *То свођење може увек да се изврши по принципу елиминације: из* N *једначина* (49) *треба елиминисати* $(N-1)$ *параметара* t_{pq}.

14. Изложени алгоритам за формирање трансформата (50) алгебарске једначине (33) може се, у великом броју случајева, знатно упростити.

Проблематика на коју је указано у § 9 ове расправе постаје још интересантнија, када се узму у обзир резултати из ове последње главе.

Математички институт
Универзитета у Скопљу

Априла 1949

Д. С. МИТРИНОВИЧ

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(Вывод)

Рассмотрим функцию $A(z)$, $z = x + iy$, определенную следующим способом

$$A(z) = R\left(z, \sqrt[a_1]{A_1}, \sqrt[a_2]{A_2}, \ldots, \sqrt[a_\alpha]{A_\alpha}\right),$$

где:

1° R является рациональной функцией цитированных аргументов;

(I) 2° $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ — целые положительные числа;

3° A_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha)$ являются функциями от z, следующей формы:

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}\left(z, \sqrt[b_1]{B_1}, \sqrt[b_2]{B_2}, \ldots, \sqrt[b_\beta]{B_\beta}\right).$$

Обозначения в последней формуле сходны предшествующим обозначениям (I).

Предполагаем, наконец, что

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}\left(z, \sqrt[l_1]{L_1}, \sqrt[l_2]{L_2}, \ldots, \sqrt[l_\lambda]{L_\lambda}\right)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

где

$$L_\nu = R_\nu^{(l)}(z)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

т. е. $R_\nu^{(l)}(z)$ являются рациональными функциями от z.

Если введем параметры t_{pq} при помощи формул:

$$A_\nu = t_{\nu a}^{a_\nu}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha);$$
$$B_\nu = t_{\nu b}^{b_\nu}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_\nu = t_{\nu l}^{l_\nu}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

приходим к следующему заключению:

Каждое алгебраическое уравнение

$$A(z)=0,$$

в котором функция $A(z)$ определена выше указанным способом, может быть преобразовано в уравнение

$$P(z)=0,$$

где $P(z)$ полином по z.

Это преобразование всегда исполнимо элиминацией параметров t_{pq}, введенных показанным способом.

D. S. MITRINOVITCH

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES NON RATIONNELLES[1]

(*Résumé*)

Notations.

1°
$$\alpha, \beta, \dots, \lambda;$$
$$a_1, a_2, \dots, a_\alpha;$$
$$b_1, b_2, \dots, b_\beta;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$l_1, l_2, \dots, l_\lambda$$

désignent des entiers positifs;

2°
$$A_1, A_2, \dots, A_\alpha;$$
$$B_1, B_2, \dots, B_\beta;$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$L_1, L_2, \dots, L_\lambda$$

sont des fonctions algébriques élémentaires de la variable complexe

$$z=x+iy,$$

c'est-à dire des fonctions de z qui se forment en effectuant sur z des opérations algébriques élémentaires, en nombre limité;

3°
$$R(M_1, M_2, \dots M_s),$$
$$R_\nu^{(\mu)}(M_1, M_2, \dots, M_s)$$

avec

$$\mu=a, b, \dots, l$$
$$(\nu, s = \text{entiers positifs}),$$

---

[1] C'est un résumé de l'étude *O algebarskim iracionalnim jednačinama*, écrite en langue serbe (voir pages précédentes de cet Annuaire).

sont des fonctions rationnelles des arguments

$$M_1,\ M_2, \ldots, M_s.$$

I. Les notations indiquées étant adoptées, considérons l'équation algébrique

$$A(z)=0, \tag{1}$$

où la fonction $A(z)$ est de la forme

$$A(z)=R\left(z, \sqrt[a_1]{A_1}, \sqrt[a_2]{A_2}, \ldots, \sqrt[a_\alpha]{A_\alpha}\right), \tag{2}$$

les fonctions $A_\nu(z)$ étant définies par les expressions

$$A_\nu(z)=R_\nu^{(a)}\left(z, \sqrt[b_1]{B_1}, \sqrt[b_2]{B_2}, \ldots, \sqrt[b_\beta]{B_\beta}\right) \tag{3}$$

$$(\nu=1,\ 2, \ldots, \alpha).$$

Les fonctions

$$B_\nu(z) \qquad (\nu=1,\ 2, \ldots, \beta)$$

intervenant dans les formules (3) sont définies par

$$B_\nu=R_\nu^{(b)}\left(z, \sqrt[c_1]{C_1}, \sqrt[c_2]{C_2}, \ldots, \sqrt[c_\gamma]{C_\gamma}\right) \tag{4}$$

$$(\nu=1,\ 2, \ldots, \beta).$$

Les fonctions

$$C_1(z),\quad C_2(z), \ldots, C_\gamma(z),$$

qui interviennent dans les formules (4), d'une manière analogue, sont exprimées à l'aide des fonctions

$$D_\nu(z) \qquad (\nu=1,\ 2, \ldots, \delta).$$

En poursuivant ainsi, on arrive, par supposition, à

$$K_\nu=R_\nu^{(k)}\left(z, \sqrt[l_1]{L_1}, \sqrt[l_2]{L_2}, \ldots, \sqrt[l_\lambda]{L_\lambda}\right), \tag{5}$$

$$(\nu=1,\ 2, \ldots, \varkappa),$$

où

$$L_\nu=R_\nu^{(l)}(z) \tag{6}$$

$$(\nu=1,\ 2, \ldots, \lambda),$$

$R_\nu^{(l)}$ étant des fonctions rationnelles de la variable z

Introduisons les paramètres $t_{\nu a}$ à l'aide des formules

$$A_\nu=t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{7}$$

$$(\nu=1,\ 2, \ldots, \alpha).$$

L'équation (1) devient alors

$$R(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0. \tag{8}$$

En posant ensuite

$$B_\nu = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{9}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta),$$

les relations (3), d'après (9), prennent la forme suivante

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}). \tag{10}$$

Si l'on met en correspondance les relations (7) et (10), on obtient

$$R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{11}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Introduisons les nouveaux paramètres $t_{\nu c}$ par les formules

$$C_\nu = t_{\nu c}^{c_\nu} \tag{12}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \gamma).$$

Les relations (4), d'après (9) et (12), conduisent à

$$R_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{13}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Par application du même procédé, on arrive enfin à

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) \tag{14}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa);$$

$$L_\nu = R_\nu^{(l)}(z) = t_{\nu l}^{l_\nu} \tag{15}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Les relations (8), (11), (13), ..., (15) forment un système de N équations, avec

$$N = 1 + \alpha + \beta + \cdots + \lambda.$$

Dans ces N relations figurent les paramètres t_{pq} dont le nombre est $(N-1)$.

Puisque R et $R_\nu^{(\mu)}$ sont des fonctions rationnelles, on peut poser

$$R = \frac{P}{Q}, \qquad R_\nu^{(\mu)} = \frac{P_\nu^{(\mu)}}{Q_\nu^{(\mu)}}, \tag{16}$$

où P, Q, $P_\nu^{(\mu)}$, $Q_\nu^{(\mu)}$ désignent des polynômes en arguments qui seront iudiqués plus bas.

D'après (16), le système de N équations, mentionné plus haut, prend la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
& P(z,\ t_{1a},\ t_{2a},\ldots,t_{\alpha a})=0; \\
& P_\nu^{(a)}(z,\ t_{1b},\ t_{2b},\ldots,t_{\beta b})-t_{\nu a}^{a_\nu}Q_\nu^{(a)}(z,\ t_{1b},\ t_{2b},\ldots,t_{\beta b})=0 \\
& \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\alpha); \\
& P_\nu^{(b)}(z,\ t_{1c},\ t_{2c},\ldots,t_{\gamma c})-t_{\nu b}^{b_\nu}Q_\nu^{(b)}(z,\ t_{1c},\ t_{2c},\ldots,t_{\gamma c})=0 \\
& \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\beta); \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (17) \\
& P_\nu^{(k)}(z,\ t_{1l},\ t_{2l},\ldots,t_{\lambda l})-t_{\nu k}^{k_\nu}Q_\nu^{(k)}(z,\ t_{1l},\ t_{2l},\ldots,t_{\lambda l})=0 \\
& \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\varkappa); \\
& P_\nu^{(l)}(z)-t_{\nu l}^{l_\nu}Q_\nu^{(l)}(z)=0 \\
& \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots,\lambda).
\end{aligned}
$$

Les faits précédents donnent la possibilité d'énoncer la:

Proposition. *Toute équation algébrique* (1) *peut être transformée en l'équation*

$$T(z)=0,$$

où $T(z)$ *est un polynôme en* z.

Cette réduction peut être toujours réalisée par l'élimination des $(N-1)$ *paramètres* t_{pq} *entre les* N *relations* (17).

II. Notre étude, écrite en langue serbe, contient aussi, en dehors des résultats précités, de nombreuses remarques relatives à des équations du type (1) dans le cas où la fonction $A(z)$ a une forme moins générale que celle considérée dans ce résumé. Ainsi, par exemple, nous avons étudié particulièrement l'équation

$$F\left(z,\ \sqrt[p_1]{P_1},\ \sqrt[p_2]{P_2},\ \ldots,\ \sqrt[p_n]{P_n}\right)=0,$$

où:

1° F désigne un polynôme en arguments indiqués;

2° $p_1,\ p_2,\ \ldots,p_n$ sont des entiers positifs;

3° $P_1,\ P_2,\ldots,P_n$ sont des polynômes en variable complexe

$$z=x+iy,$$

les coefficients de ces polynômes étant des nombres complexes.

III. Sans difficulté, on peut étendre le procédé employé à un système des m équations algébriques en

$$z_1,\ z_2,\ldots,z_s,$$

où

$$z_k=x_k+iy_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,s),$$

ces équations algébriques étant du type (1).

À la fin, il faut noter le fait que dans la littérature mathématique nous n'avons pas rencontré le problème sur la transformation des équations algébriques non rationnelles traité dans toute sa généralité comme nous l'avons fait ici, et c'est seulement grâce à cette circonstance que nosu publions ces remarques sur le problème en question

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ RICCATI-ЕВИХ ЈЕДНАЧИНА КОЈЕ СУ ИНВАРИЈАНТНЕ У ОДНОСУ НА ЈЕДНУ СМЕНУ ФУНКЦИЈЕ

(Примљено 17 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ КЛАСИ RICCATI-ЕВИХ ЈЕДНАЧИНА КОЈЕ СУ ИНВАРИЈАНТНЕ У ОДНОСУ НА ЈЕДНУ СМЕНУ ФУНКЦИЈЕ

Глава прва

1. Посматрајмо Riccati-еву једначину каноничког облика

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \Phi(x) \tag{1}$$

и извршимо у њој смену функције

$$y = \frac{Qz}{z+1} \tag{2}$$

$$[Q = Q(x) \neq 0]$$

остављајући исту независно-променљиву x.

Једначина (1) тада добија облик

$$\frac{dz}{dx} = A(x)\, z^2 + B(x)\, z + C(x), \tag{3}$$

где коефицијенти A, B, C имају вредности[1])

$$A(x) = \frac{\Phi - Q' - Q^2}{Q},$$

$$B(x) = \frac{2\Phi - Q'}{Q}, \tag{4}$$

$$C(x) = \frac{\Phi}{Q}.$$

---

[1]) Претпоставља се да функција $Q(x)$ није једно партикуларно решење једначине (1), тј. да је

$$\Phi - Q' - Q^2 \neq 0.$$

Нова смена функције

$$z = -\frac{1}{A} y_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A^2} + \frac{B}{A}\right) \tag{5}$$

своди једначину (3) поново на канонички облик[1])

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi_1(x), \tag{6}$$

где је

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{4} B^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{A'}{A}\right)^2 - \frac{1}{2} B' \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{2} B \frac{A'}{A} - \frac{1}{2} \frac{A''}{A} - AC.$$

На основу образаца (4), место релација (5) и (7), може се написати[2]):

$$z = -\frac{Q}{\Phi - Q' - Q^2} y_1 \tag{8}$$

$$+ \frac{QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2}{2(\Phi - Q' - Q^2)^2},$$

$$\Phi_1(x) = \Phi + \frac{Q'' - \Phi'}{Q} \tag{9}$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q^2)^2}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2}$$

$$+ \frac{\Phi - Q'}{Q} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2}.$$

---

[1]) Детаљније о овим трансформацијама *видети:*

Д. С. Митриновић, *Неколико ставова о* Riccati-*евој диференцијалној једначини* (*Глас Српске академије наука*, књига 181, 1939, стр. 171—236. Нарочито *видети* стр. 187—188).

[2]) Напред је већ претпостављено да је

$$\Phi - Q' - Q^2 \neq 0,$$

јер иначе формуле (8), (9) и (10) не би имале смисла.

Трансформације (2) и (8) могу се скупити у једну: тј. релација

$$y_1 = \frac{(\Phi - Q' - Q^2)\, y}{Q\,(y - Q)} \tag{10}$$
$$+ \frac{QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2}{2Q\,(\Phi - Q' - Q^2)}$$

везује интеграле y и y_1 Riccati-евих једначина (1) и (6) које су дате у каноничком облику.

Ако је y опште решење диференцијалне једначине (1), тада је функција y_1, која је дефинисана формулом (10), опште решење једначине (6).

Напомена. Полазећи од идентитета:

$$-(QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2)$$
$$\equiv Q\,(\Phi - Q' - Q^2)' + 2\,(\Phi - Q')\,(\Phi - Q' - Q^2),$$

релација (10) може се овако написати:

$$y_1 = \frac{(\Phi - Q' - Q^2)\, y}{Q\,(y - Q)} \tag{11}$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2} + \frac{\Phi - Q'}{Q}.$$

Из последње релације излази:

$$y = \frac{\alpha y_1 + \beta}{\gamma y_1 + \delta}, \tag{12}$$

где је

$$\begin{aligned} \alpha &= 2Q\,(\Phi - Q' - Q^2), \\ \beta &= Q\,(\Phi - Q' - Q^2)' + 2\,(\Phi - Q')\,(\Phi - Q' - Q^2), \\ \gamma &= 2\,(\Phi - Q' - Q^2), \\ \delta &= (\Phi - Q' - Q^2)' + 2Q\,(\Phi - Q' - Q^2). \end{aligned} \tag{13}$$

2. Трансформацијом (12) може се прећи са једначине (1) на једначину (6). Обрнуто, трансформацијом (11) прелази се са једначине (6) на једначину (1). Трансформација (12), у којој су коефицијенти

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

дефинисани формулама (13), има особину да задржава облик једначине (1), тј. посматрана трансформација претвара канонички облик Riccati-еве једначине поново у канонички облик.

Поставимо сада проблем о одређивању Riccati-евих *једначина каноничког облика које се претварају у себе саме сменом функције* (10), *тј. које у односу на посматрану смену* (10) *остају* **инваријантне**[1]).

Условна једначина овог проблема је:

$$\Phi_1 (x) = \Phi (x) \tag{14}$$

и тада једначине (1) и (6) постају

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \Phi (x),$$

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi (x)$$

и разликују се једна од друге само нотацијом непознате функције: у једној је непозната функција означена са y, а у другој са y_1.

Јасно је да је овде:

$$y_1 = y. \tag{15}$$

Услов (14), према обрасцу (9), постаје:

$$\frac{Q'' - \Phi'}{Q} + \frac{3}{4} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q)^2} \tag{16}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2} + \frac{\Phi - Q'}{Q} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2} = 0.$$

---

[1]) P. Appell у расправи *Sur des équations différentielles linéaires transformalles en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable (Acta mathematica*, t. 15, 1891, p. 281—315; *видети* нарочито стр. 283 и стр. 315) дефинише појам трансформовања диференцијалних једначина у себе саме за једну смену функције и независно-променљиве.

Видети такође:

1° A. Buhl, *Nouveaux Éléments d'Analyse*, t. I, deuxième édition Paris, 1944, p. 132.

Овде Buhl дефинише појам о инваријантности једне диференцијалне једначине за дату трансформацију променљивих и наводи као пример D'Alembert-ову парцијалну једначину II реда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (c = \text{const})$$

која је инваријантна, тј. претвара се у себе саму, за Lorentz-ову трансформацију независно променљивих. Овај факат игра значајну улогу у Математичкој физици.

2° D. S. Mitrinovitch, *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre transformalle en elle-même. (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. 228, 1949, p. 1188—1190).

Диференцијална једначина (16) спада у тип једначина

$$F(\Phi, \Phi', \Phi''; Q, Q', Q'', Q''') = 0.$$

Према томе, једначина (16) је неодређена диференцијална једначина са две непознате функције

$$\Phi(x), \quad Q(x),$$

али у којој не фигурише експлицитно независно промељива x.

Поставићемо ова два проблема:

Први проблем: *Дата је функција* $Q(x)$ *коју ћемо звати карактеристична функција придружена* Riccati-евој *једначини; наћи функцију* $\Phi(x)$ *која је дефинисана диференцијалном једначином* (16);

Други проблем: *Дата је функција* $\Phi(x)$; *одредити карактеристичну функцију* $Q(x)$ *која је дефинисана једначином* (16).

3. Када је дата карактеристична функција $Q(x)$, једначина (16) спада у тип диференцијалних једначина облика

$$G(x, \Phi, \Phi', \Phi'') = 0.$$

Могло би се помислити да стварно одређивање функције $\Phi(x)$ поставља веће тешкоће него сама интеграција полазне једначине (1). Али, у ствари, није такав случај и то ћемо одмах показати.

Уведимо ознаку

$$\Phi - Q' - Q^2 = t, \tag{17}$$

одакле излази:

$$(\Phi - Q' - Q^2)' = \frac{dt}{dx} = t',$$

$$(\Phi - Q' - Q^2)'' = \frac{d^2t}{dx^2} = t'',$$

$$\Phi' - Q'' = t' + 2QQ'.$$

Једначина (16), водећи рачуна о релацији (17), постаје

$$2Q' - \frac{3}{4}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{t''}{t} - Q\frac{t'}{t} = 0. \tag{18}$$

Уведимо сада нову функцију η помоћу формуле

$$t = e^{\int \eta\, dx}. \tag{19}$$

Диференцијална једначина (18) добија тада вид

$$\frac{d\eta}{dx}-\frac{1}{2}\eta^2-2Q\eta+4Q'=0. \tag{20}$$

Последња једначина припада класи Riccati-евих једначина.

Испитивањем ове једначине закључује се: да је функција

$$\eta=-4Q$$

једно партикуларно решење једначине (20).

На основу овог резултата одређује се *опште решење* једначине (20) у облику:

$$\eta=-4Q+\frac{2e^{-2\int Q\,dx}}{K-\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}, \tag{21}$$

где је K интеграциона константа.

Полазећи од релације (19), t се добија помоћу формуле

$$t=exp\int\eta\,dx \tag{22}$$

$$=exp\left[\int-4Q\,dx+\int\frac{2e^{-2\int Q\,dx}}{K-\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}\,dx\right].$$

Пошто је

$$\int\frac{2e^{-2\int Q\,dx}\,dx}{K-\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}=-2\,ln\left(K-\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)+\text{Const},$$

за t налазимо

$$t=\frac{K_1e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K-\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2}, \tag{23}$$

где је K_1 нова интеграциона константа.

Према релацији (17), функција $\Phi(x)$ има облик

$$\Phi(x)=Q'+Q^2+\frac{K_1e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K-\int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2}. \tag{24}$$

Први од проблема формулисаних у § 2 *ове расправе решен је обрасцем* (24).

4. Као последица услова (14), чији је развијен облик дат релацијом (16), добија се

$$y_1 = y. \tag{25}$$

Решења једначина (1) и (6) везана су релацијом (10), која с обзиром на услов (25) постаје

$$\begin{aligned} &2(\Phi - Q' - Q^2)y^2 + (\Phi' - Q'' - 2QQ')y \\ &+ (QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2) = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Ако се у једначину (26) унесе вредност за Φ дефинисана обрасцем (24) и тако формирана једначина реши по y, добија се, после заметних израчунавања:

$$\begin{aligned} y_I &= Q - \frac{\omega_1 e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}, \\ y_{II} &= Q - \frac{\omega_2 e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}, \end{aligned} \tag{27}$$

где су ω_1 и ω_2 корени једначине

$$\omega^2 - \omega - K_1 = 0$$

решене по ω.

5. Напред добијени резултати могу се овако резимирати:

Став. Riccati-ева *диференцијална једначина*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = Q' + Q^2 + \frac{K_1 e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2}$$

$$[Q = Q(x), \quad K = \text{Const}, \quad K_1 = \text{Const}]$$

трансформује се у себе саму сменом функције

$$y = Q + \frac{K_1 e^{-4\int Q\,dx}}{\left(K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx\right)^2} \cdot \frac{1}{y_1 - Q + \dfrac{e^{-2\int Q\,dx}}{K - \int e^{-2\int Q\,dx}\,dx}},$$

где је y_1 нова непозната функција.

Уочена диференцијална једначина је интеграбилна, јер су позната два њена партикуларна решења (27).

6. Да би формуле биле једноставније, место произвољне функције Q увешћемо другу функцију од x. Ставимо

$$Q(x) = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

где је

$$\lambda = \lambda(x), \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dx}.$$

Будући да је тада

$$exp\left(-2\int Q\,dx\right) = \frac{1}{\lambda^2},$$

има се

$$\Phi(x) = \frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{K_1}{\lambda^4\left(K - \int \frac{dx}{\lambda^2}\right)^2}.$$

У изразу за функцију Φ фигурише сада само једна квадратура.

Место функције $\lambda(x)$ уведимо нову функцију $\mu(x)$ помоћу формуле

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mu',$$

тј.

$$\lambda = (\mu')^{-\frac{1}{2}},$$

одакле следује:

$$\lambda' = -\frac{1}{2}(\mu')^{-\frac{3}{2}}\mu'',$$

$$\lambda'' = \frac{3}{4}(\mu')^{-\frac{5}{2}}(\mu'')^2 - \frac{1}{2}(\mu')^{-\frac{3}{2}}\mu''',$$

$$\frac{\lambda''}{\lambda} = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'}.$$

Према томе, за Φ налазимо:

$$\Phi(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'} + \frac{K_1\mu'^2}{(K-\mu)^2}.$$

Партикуларна решења (27) имају сада облик:

$$y_I = -\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} - \omega_1 \frac{\mu'}{K-\mu},$$
$$y_{II} = -\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} - \omega_2 \frac{\mu'}{K-\mu}, \tag{28}$$

где су ω_1 и ω_2 решења једначине

$$\omega^2 - \omega - K_1 = 0.$$

На основу изложеног став, наведен у § 5, може се формулисати и на следећи начин:

Диференцијална једначина

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'} + \frac{K_1 \mu'^2}{(K-\mu)^2}, \tag{29}$$

где су: μ ма каква функција промењиве x, а K и K_1 ма какве константе, *инваријантна је у односу на трансформацију функције*

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} + K_1\left(\frac{\mu'}{K-\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'} + \frac{\mu'}{K-\mu}}, \tag{30}$$

где је y_1 нова функција.

На крају, ако се стави

$$K - \mu = \theta(x),$$
$$K_1 = \alpha = \text{Const},$$

релације (28), (29) и (30) имају респективно ове облике:

$$y_I = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \omega_1 \frac{\theta'}{\theta},$$
$$y_{II} = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \omega_2 \frac{\theta'}{\theta}; \tag{31}$$

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2; \tag{32}$$

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}}, \tag{33}$$

где су ω_1 и ω_2 корени једначине

$$\omega^2 - \omega - \alpha = 0.$$

Из претходног се види да смо у релацијама (28), (29), (30), могли узети да је

$$K=0,$$

а да тиме не умањимо генералност резултата.

7. Напред изложене чињенице омогућавају да се формулише овај.

Став. Riccati-ева *диференцијална једначина*

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \tag{34}$$

$$(\alpha=\text{Const}\neq 0)$$

трансформује се у себе саму сменом функције

$$y=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\frac{1}{y_1+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\frac{\theta'}{\theta}},$$

тј. *посматрана једначина остаје инваријантна и има облик*

$$\frac{dy_1}{dx}+y_1^2=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2.$$

θ је произвољна функција променљиве x, али се претпоставља[1]):

1° непрекидност функције θ у једном посматраном интервалу променљиве x;

2° егзистенција извода, који се појављују у формулама, и то у истом интервалу променљиве x;

3° $\theta(x)\neq\text{Const}$.

Узевши у обзир партикуларна решења (31), опште решење једначине (34), у случају када је $\alpha\neq-\frac{1}{4}$, гласи:

$$\frac{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_1\frac{\theta'}{\theta}}{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_2\frac{\theta'}{\theta}}=Me^{\int(\omega_2-\omega_1)\frac{\theta'}{\theta}dx}$$

---

[1]) На аналогичан начин напред је прећутно претпостављена: непрекидност функција

$$Q(x),\quad \lambda(x),\quad \mu(x)$$

и егзистенција њихових извода у интервалу непрекидности. Овим условима треба додати један допунски услов сличан ономе горе под 3° за функцију $\theta(x)$.

тј.

$$\frac{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_1\frac{\theta'}{\theta}}{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_2\frac{\theta'}{\theta}}=M\theta^{\omega_2-\omega_1}$$

(M = произвољна интеграциона константа).

Будући да су ω_1 и ω_2 решења једначине

$$\omega^2-\omega-\alpha=0,$$

можемо ставити

$$|\omega_1-\omega_2|=\sqrt{1+4\alpha}.$$

Карактеристична функција $Q(x)$ коју смо увели у § 2 изражава се, помоћу функције $\theta(x)$, према формули

$$Q(x)=\frac{\lambda'}{\lambda}=-\frac{1}{2}\frac{\mu''}{\mu'}=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}.$$

Горе наведени став потпуно решава први проблем постављен у § 2, јер је нађена најопштија функција $\Phi(x)$:

$$\Phi(x)=\frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2$$

која одговара произвољној карактеристичној функцији

$$Q(x) \quad \text{односно} \quad -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}, \qquad \theta=\theta(x).$$

8. Поставља се сада питање које је већ формулисано у § 2 (други проблем), да се за дато $\Phi(x)$ нађе $Q(x)$ дефинисано једначином (16). По Q једначина (16) претставља диференцијалну једначину трећег реда.

Ако бисмо успели да решимо тај проблем, значило би да смо полазећи од дате Riccati-еве једначине

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\Phi(x) \tag{35}$$

(Φ = дата функција промењљиве x),

нашли Q, тј. смену

$$y=Q+\frac{\Phi-Q'-Q^2}{y_1+\frac{1}{2}[ln(\Phi-Q'-Q^2)]'+Q}$$

која једначину (35) претвара у једначину

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi(x),$$

тј. трансформује је у себе саму.

Наравно, да тај проблем не можемо решити с обзиром на познати Liouville-ов став.

У ствари, овде је проблем интеграције Riccati-еве једначине сведен на изналажење партикуларних решења једначине (16), где је $\Phi(x)$ дата функција.

Глава друга

9. У претходној глави у једначини

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \Phi(x) \tag{36}$$

извршили смо смену функције

$$y = \frac{Q(x)z}{z+1}. \tag{37}$$

Сада ћемо поћи од смене функције општијег облика

$$y = \frac{Qz+R}{z+T}, \tag{38}$$

где је z нова непозната функција и где су

$$Q, \ R, \ T$$

функције од x такве да је

$$QT - R \neq 0.$$

Диференцијална једначина (36), када се на функцији y изврши билинеарна трансформација (38), добија облик

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z^2 + B(x)z + C(x), \tag{39}$$

где су коефицијенти A, B, C дефинисани обрасцима:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\Phi - Q' - Q^2}{QT - R}, \\ B(x) &= \frac{2T\Phi - 2QR + QT' - Q'T - R'}{QT - R}, \\ C(x) &= \frac{T^2\Phi - R^2 + RT' - R'T}{QT - R}. \end{aligned} \tag{40}$$

Riccati-ева једначина (39), ако се на функцији z изврши линеарна трансформација

$$z = -\frac{1}{A}\, y_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A^2} + \frac{B}{A}\right), \tag{41}$$

добија поново канонички облик

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = \Phi_1(x), \tag{42}$$

где је

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) = {} & \frac{(T\Phi - QR + QT' - R')(T\Phi - QR - Q'T)}{(QT - R)^2} \\ & - \frac{(\Phi - Q' - Q^2)(T^2\Phi - R^2 + RT' - R'T)}{(QT - R)^2} \\ & + \frac{Q''T + Q'T' - (T\Phi)' + (QR)'}{QT - R} \\ & + \frac{T\Phi - QR - Q'T}{QT - R} \cdot \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2} \\ & + \frac{3}{4}\left[\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2}\right]^2 \\ & - \frac{1}{2}\,\frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2}. \end{aligned} \tag{43}$$

10. Потражимо услов да би једначина (36) остала *инваријантна* када се на функцији y изврши билинеарна трансформација (38), у којој је z дефинисано формулом (41), где су коефицијенти

$$A(x), \quad B(x)$$

дати формулама (40).

Тражени услов јесте једначина (43) у којој још место $\Phi_1(x)$ треба ставити $\Phi(x)$.

Из једначине (43), где је стављено

$$\Phi_1 = \Phi,$$

после извршења простих али заметних трансформација[1]) добија се једначина доста једноставног облика

$$Q(\Phi' - Q'') - 2Q'(\Phi - Q') \tag{44}$$
$$+\frac{3}{4}\frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{\Phi - Q' - Q^2}$$
$$-\frac{1}{2}(\Phi - Q' - Q^2)'' = 0.$$

Као што се види, функције R и T уопште се не појављују у једначини (44). Стога неће бити умањена генералност резултата коме се тежи, ако се стави

$1^0 \quad R = 0, \quad T = 1, \quad Q \neq 0;$

или

$2^0 \quad R = 1, \quad T = 0.$

У обадва случаја задовољен је услов

$$QT - R \neq 0$$

под којим су изведене претходне трансформације.

Први од наведених случајева већ смо имали у првој глави ове расправе. Други случај допушта и могућност

$$Q = 0.$$

11. Ако се, као у претходној глави, стави

$$\Phi - Q' - Q^2 = t,$$

---

[1]) Коефицијенти уз R' и T' идентички се анулирају. Коефицијент уз T^2 је

$$\frac{Q^2}{\Lambda}[Q(\Phi' - Q'') - 2Q'(\Phi - Q')],$$

где је

$$\Lambda = (QT - R)^2(\Phi - Q' - Q^2).$$

Коефицијент уз RT јесте израз:

$$\frac{-2Q}{\Lambda}[Q(\Phi' - Q'') - 2Q'(\Phi - Q')].$$

Коефицијент уз R^2 је облика

$$\frac{1}{\Lambda}[Q(\Phi' - Q'') - 2Q'(\Phi - Q')].$$

Тако једначина (43), праћена условом

$$\Phi_1 = \Phi,$$

диференцијална једначина (44) постаје

$$2Q' - \frac{3}{4}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{t''}{t} - Q\,\frac{t'}{t} = 0,$$

а та једначина идентична је једначини (18).

Уосталом, једначини (16) може се дати облик (44) под претпоставком да је

$$Q \neq 0.$$

У једначини (16) извршимо ову трансформацију:

Израз

$$\frac{Q''-\Phi'}{Q} + \frac{\Phi-Q'}{Q}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'}{\Phi-Q'-Q^2}$$

постаје

$$\frac{-2QQ'(\Phi-Q')\quad Q^2(Q''-\Phi')}{Q(\Phi-Q'-Q^2)}.$$

Ако је $Q \neq 0$, има се:

$$\frac{Q''-\Phi'}{Q} + \frac{\Phi-Q'}{Q}\cdot\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'}{\Phi-Q'-Q^2} \tag{45}$$

$$\equiv \frac{Q(\Phi'-Q'')-2Q(\Phi-Q')}{\Phi-Q'-Q^2}.$$

Релација (44) може се написати на следећи начин:

$$\frac{Q(\Phi'-Q'')-2Q'(\Phi-Q')}{\Phi-Q'-Q^2} + \frac{3}{4}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'^2}{(\Phi-Q'-Q^2)^2} \tag{46}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)''}{\Phi-Q'-Q^2} = 0.$$

узима облик

$$\frac{1}{\Lambda}[Q(\Phi'-Q'')-2Q'(\Phi-Q')](QT-R)^2$$

$$+\frac{3}{4}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)'^2}{(\Phi-Q'-Q^2)^2}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(\Phi-Q'-Q^2)''}{\Phi-Q'-Q^2} = 0.$$

Пошто је

$$QT-R \neq 0,$$

последња једначина се своди на (44).

Ако се узме у обзир идентитет (45), закључује се да су услови (16) и (44) односио (46) еквивалентни ако је $Q \neq 0$.

У случају ако је $Q = 0$, тада расматрања у првој глави не важе. Услов (44) за $Q = 0$, постаје

$$2\Phi\Phi'' - 3\Phi'^2 = 0,$$

а то је случај који је проучавао М. Куренский[1]); на томе случају нећемо се задржавати.

12. У једној новој расправи проучаћемо, на општији начин, питање о инваријантности Riccati-еве једначине

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

за трансформацију облика

$$y = \frac{Q(x)z + R(x)}{S(x)z + T(x)}$$

$$(QT - RS \neq 0)$$

и показаћемо исто тако да се проблем из ове расправе може довести у везу са појмом *групе трансформација* и са општом теоријом инваријаната диференцијалних једначина.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ, ПРЕОБРАЗУЕМЫХ В САМИХ СЕБЯ

(*Вывод*)

В этой статье, между прочим, доказываем следующую теорему:

Уравнение Риккати

$$(R) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2$$

$$(\alpha = \text{const} \neq 0)$$

---

1) M. Kourensky, *Sur l'équation de Riccati* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie sesta, vol. 9, 1929, p. 956—957).

преображается в само себя подстановкой функции

$$y=-\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}+\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\frac{1}{y_1+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\frac{\theta'}{\theta}},$$

где $\theta(x)$ произвольная функция от x $[\theta(x)\neq\text{const}]$, непрерывная и имеющая три первые производные.

Общее решение уравнения (R) дано реляцией $\left(\alpha\neq-\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_1\frac{\theta'}{\theta}}{y+\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'}-\omega_2\frac{\theta'}{\theta}}=M\theta^{\omega_2-\omega_1}$$

где:

M = произвольное постоянное,

ω_1, ω_2 = корни уравнения

$$\omega^2-\omega-\alpha=0.$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DE RICCATI INVARIANTES RELATIVEMENT À UN CHANGEMENT DE FONCTION

(*Résumé*)

1. On considère l'équation différentielle de Riccati sous la forme canonique

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\Phi(x), \tag{1}$$

et l'on effectue sur la fonction inconnue y la substitution bilinéaire[1])

$$y=Q+\frac{2(\Phi-Q'-Q^2)^2}{2(\Phi-Q'-Q^2)(y_1+Q)+(\Phi-Q'-Q^2)'}, \tag{2}$$

où[2]):

1° Q $[Q\neq0$, Q n'est pas une solution de l'équation (1)] signifie une fonction arbitraire de x, continue et dérivable;

2° y_1 est une nouvelle fonction inconnue.

L'équation de Riccati (1) se transforme alors en

$$\frac{dy_1}{dx}+y_1^2=\Phi_1(x), \tag{3}$$

---

1) *Voir:*
D. S. Mitrinovitch, *Quelques propositions relatives à l'équation différentielle de* Riccati *(Bulletin de l'Académie serbe des sciences*, série A, t. 6. 1939, p. 132 135).

2) Dans cette étude, les accents marquent des dérivées prises par rapport à la variable x.

avec

$$\Phi_1(x) = \Phi + \frac{Q'' - \Phi'}{Q} \tag{4}$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q^2)^2}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2}$$

$$+ \frac{\Phi - Q'}{Q} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2}.$$

De la relation (2) il s'ensuit que

$$y_1 = \frac{(\Phi - Q' - Q^2)\, y}{Q(y - Q)} \tag{5}$$

$$+ \frac{QQ'' - Q\Phi' + 2Q^2\Phi - 2Q'^2 + 4Q'\Phi - 2\Phi^2}{2Q(\Phi - Q' - Q^2)}.$$

La relation (2), c'est-à-dire la relation (5), relie les intégrales

$$y(x) \quad \text{et} \quad y_1(x)$$

des équations de Riccati respectives (1) et (3), données sous la forme canonique.

La transformation (5) a donc pour effet de conserver la forme de l'équation (1): en fait, il existe des transformations changeant des formes déjà canoniques en d'autres formes canoniques.

II. On propose le problème de déterminer des équations de Riccati se transformant en elles-mêmes par le changement de fonction (5). En d'autres termes, on cherche des équations de Riccati qui restent invariantes relativement à la transformation (5).

Si l'on compare l'équation (1) avec (3), on fournit la relation

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) \tag{6}$$

comme l'équation du problème proposé.

La condition (6) étant satisfaite, il s'ensuit que

$$y_1 = y. \tag{7}$$

La relation (6), d'après (4), prend la forme

$$\frac{Q'' - \Phi'}{Q} + \frac{3}{4} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'^2}{(\Phi - Q' - Q^2)^2} \tag{8}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)''}{\Phi - Q' - Q^2} + \frac{\Phi - Q'}{Q} \frac{(\Phi - Q' - Q^2)'}{\Phi - Q' - Q^2} = 0.$$

L'équation (8) rentre dans le type d'équations de la forme

$$F(\Phi, \Phi', \Phi''; Q, Q', Q'', Q''') = 0,$$

donc c'est une équation différentielle indéterminée à deux fonctions inconnues Φ et Q, mais dans laquelle ne figure pas explicitement la variable indépendante x.

On peut proposer ces deux questions:

1° On donne la fonction $Q(x)$ qui sera nommée: *fonction caractéristique* associée à l équation de Riccati (1); il faut trouver la fonction $\Phi(x)$, définie par l'équation (8), qui est en Φ du second ordre;

2° On donne la fonction $\Phi(x)$; il faut trouver la fonction caractéristique $Q(x)$, définie à l'aide de l'équation (8) qui est en Q du troisième ordre.[1])

III. Pour résoudre la première question, posons

$$\Phi - Q' - Q^2 = t \tag{9}$$

dans (8); on obtient

$$2Q' - \frac{3}{4}\left(\frac{t'}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{t''}{t} - Q\frac{t'}{t} = 0. \tag{10}$$

Par la nouvelle substitution

$$t = e^{\int \eta dx} \tag{11}$$

(η = une nouvelle fonction),

l'équation (10) se transforme en

$$\frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{2}\eta^2 - 2Q\eta + 4Q' = 0. \tag{12}$$

En analysant l'équation (12), on constate le fait important que la dernière équation admet comme intégrale particulière la fonction

$$\eta_1 = -4Q.$$

La solution générale de l'équation de Riccati (12) est:

$$\eta = -4Q + \frac{2e^{-2\int Q dx}}{K - \int exp(-2\int Q dx) dx}, \tag{13}$$

où K désigne une constante d'intégration.

Si l'on effectue les calculs exigeant les formules (11) et (9), on fournit

$$\Phi(x) = Q' + Q^2 + \frac{K_1 e^{-4\int Q dx}}{\left[K - \int exp(-2\int Q dx) dx\right]^2} \tag{14}$$

K_1 étant une nouvelle constante arbitraire.

En profitant de la forme arbitraire de la fonction $Q(x)$, on peut faire disparaître dans la relation (14) le signe de quadrature, en laissant,

1) Dans ce résumé, on se contente de traiter la première question. Dans la même étude, écrite en serbe, on indique quelques remarques sur la seconde question.

toutefois, toute la généralité à la fonction $Q(x)$. Pour effectuer ceci, posons tout d'abord

$$Q = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

$\lambda \neq 0$ étant une fonction arbitraire de x.

La fonction $\Phi(x)$, définie par (14), prend alors la forme

$$\Phi(x) = \frac{\lambda''}{\lambda} + \frac{K_1}{\lambda^4 \left(K - \int \lambda^{-2} dx\right)^2} \tag{15}$$

Si l'on introduit une nouvelle fonction arbitraire $\mu(x)$, à l'aide de la relation

$$\frac{1}{\lambda^2} = \mu',$$

la fonction Φ obtient la forme

$$\Phi(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\mu''}{\mu'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\mu'''}{\mu'} + \frac{K_1 \mu'^2}{(K-\mu)^2}. \tag{16}$$

Si l'on pose enfin

$$K - \mu = \theta(x), \quad K_1 = \alpha, \quad \alpha = \text{const} \neq 0,$$

la fonction Φ, en vertu de (16), prend la forme définitive:

$$\Phi(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2.$$

Les faits mentionnés plus haut donnent la possibilité d'énoncer le résultat suivant qui est la réponse à la première des questions proposées précédemment:

Proposition. *L'équation de* Riccati

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \tag{17}$$

$$(\alpha = \text{Const} \neq 0)$$

se transforme en elle-même par le changement de fonction

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}},$$

où $\theta(x) \neq \text{const}$ *désigne une fonction arbitraire de* x, *continue et possédant les trois premières dérivées.*

La solution générale de l'équation (17), dans le cas où $\alpha \neq -\frac{1}{4}$, est

$$\frac{y + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \omega_1 \frac{\theta'}{\theta}}{y + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \omega_2 \frac{\theta'}{\theta}} = M\theta^{\omega_2 - \omega_1}$$

avec

M = constante d'intégration;

ω_1, ω_2 = les racines de l'équation

$$\omega^2 - \omega - \alpha = 0.$$

IV. En proposant de résoudre le même problème pour l'équation (1), en partant de la transformation bilinéaire plus générale que (2), on trouve les résultats identiques à ceux déjà fournis dans cette étude.

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЛИНЕАРНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ ДРУГОГ РЕДА КОЈА СЕ ПОЈАВЉУЈЕ У ЈЕДНОМ ПРОБЛЕМУ МАТЕМАТИЧКЕ ФИЗИКЕ

(Примљено 17 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЛИНЕАРНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ ДРУГОГ РЕДА КОЈА СЕ ПОЈАВЉУЈЕ У ЈЕДНОМ ПРОБЛЕМУ МАТЕМАТИЧКЕ ФИЗИКЕ

1. Проблем којим се бавио професор Миланковић у расправи *Zar Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre*[1]) своди се, у крајњој анализи, на одређивање функције $\varepsilon(x)$ помоћу једне линеарне диференцијалне једначине другог реда којој одговара ова хомогена једначина:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3\left(\frac{d}{dx}\log a\right)\frac{d\varepsilon}{dx} \tag{1}$$

$$+\left[\frac{da}{dx} - a\frac{d}{dx}\log a + 2\left(\frac{d}{dx}\log a\right)^2 - \frac{d^2}{dx^2}\log a\right]\varepsilon = 0.$$

У тој једначини a означава једну функцију од x којом се може располагати произвољно.

Професор Миланковић, на крају поменуте расправе, навео је један случај интеграбилитета једначине (1), наиме:

$$a(x) = k_1\, e^{k_2 x},$$

где су k_1 и k_2 константе. У овом случају, општи интеграл једначине (1) дат је изразом

$$\varepsilon(x) = C_1\, e^{k_2 x} + C_2\, e^{2k_2 x}, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 претстављају интеграционе константе.

2. Показаћемо да је могућно интегралити једначину (1) за ма какав облик функције $a(x)$.

---

[1]) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623–638. Видети нарочито стр. 634.

Диференцијалној једначини (1) може се дати овај једноставнији облик:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3\frac{a'}{a}\frac{d\varepsilon}{dx} + \left(3\frac{a'^2}{a^2} - \frac{a''}{a}\right)\varepsilon = 0, \tag{3}$$

$$\left(a' = \frac{da}{dx}, \quad a'' = \frac{d^2a}{dx^2}\right).$$

Очевидно је да је функција

$$a(x)$$

једно партикуларно решење једначине (3).

Друго партикуларно решење једначине (3) дато је изразом:

$$a(x)\int a(x)\,dx.$$

Према томе, опште решење једначине (3) приказано је релацијом

$$\varepsilon(x) = C_1\,a(x) + C_2\,a(x)\int a(x)\,dx, \tag{4}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

За случај када је

$$a(x) = k_1\,e^{k_2 x},$$

добија се, према (4),

$$\varepsilon(x) = C_1 k_1\,e^{k_2 x} + C_2\frac{k_1^2}{k_2}\,e^{2k_2 x},$$

што је у складу са резултатом (2) проф. Миланковића.

3. У једначини (3) место функције $a(x)$ ставимо функцију $A(x)$ помоћу везе

$$a(x) = e^{A(x)}.$$

Једначина (3) добија тада облик

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3A'\frac{d\varepsilon}{dx} + (2A'^2 - A'')\,\varepsilon = 0. \tag{5}$$

Ако се овде стави

$$A = -\frac{1}{3}\int f(x)\,dx,$$

једначина (5) постаје

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + f(x)\frac{d\varepsilon}{dx} + \left[\frac{2}{9}f^2(x) + \frac{1}{3}f'(x)\right]\varepsilon = 0. \tag{6}$$

Ова једначина јесте партикуларни случај једначине

$$\varepsilon'' + f\varepsilon' - [\lambda(\lambda+1)f^2 + \lambda f']\varepsilon = 0 \tag{7}$$

$$[f = f(x),\ \lambda = \text{const.}]$$

коју је интегралио H. Görtler[1]).

Заиста, ако се у (7) стави

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

добија се управо једначина (6).

Görtler-ов резултат претставља партикуларни случај овог нашег става:

Диференцијална једначина

$$FHy'' + (F'H + FI + GH)y' + (G'H + GI)y = 0 \tag{8}$$

$$(F, G, H, I = \text{функције од } x)$$

може се свести на интеграбилан систем једначина

$$\begin{aligned} Fy' + Gy &= z, \\ Hz' + Iz &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Ако се у (8) стави

$$F \equiv 1, \quad G \equiv -\lambda f(x), \quad H \equiv 1, \quad I \equiv (\lambda+1) f(x)$$

добиће се наведени Görtler-ов случај.

Математички институт
Универзитет у Скопљу

Фебруара 1949

---

[1]) *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233, Differentiagleichung (5).

Видети тако исто:

E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmehtoden und Lösungen*, Bd. 1: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, dritte Auflage, Leipzig, 1944, S. 643, Differentialgleichung 2.76a.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

О ЛИНЕЙНОМ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА КОТОРОЕ ПОЯВЛЯЕТСЯ В ОДНОМ ВОПРОСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(*Вывод*)

Диференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}-3\left(\frac{d}{dx}\log a\right)\frac{d\varepsilon}{dx} \tag{1}$$

$$+\left[\frac{da}{dx}-a\frac{d}{dx}\log a+2\left(\frac{d}{dx}\log a\right)^2-\frac{d^2}{dx^2}\log a\right]\varepsilon=0,$$

где a функция от x, появляется в одном вопросе, рассматриваемом Миланковичем.[1])

Миланкович указывает, что уравнение (1) интегрируемо в случае, если:

$$a(x)=k_1 e^{k_2 x}$$

$$(k_1,\ k_2=\text{const}).$$

В настоящей статье показываем что уравнение (1) может быть интегрировано и в случае произвольной функции $a(x)$, так как $a(x)$ – одно партикулярное решение уравнения (1), т. е.

$$\varepsilon_1(x)=a(x).$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE INTERVENANT DANS UN PROBLÈME DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

(*Résumé*)

1. L'équation différentielle (1)*), où a désigne une fonction de x dont on peut disposer arbitrairement, intervient dans un problème, considéré par Milankovitch[2]).

---

1) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623—638. Смотреть особенно стр. 634.

*) Les formules numérotées par chiffres arabes se rapportent au texte en langue serbe.

2) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623—638. *Cf.* notamment page 634.

Milankovitch a indiqué un cas d'intégrabilité de l'équation (1), à savoir

$$a(x) = k_1 e^{k_2 x}$$

$$(k_1,\ k_2 = \text{const.}).$$

Dans cette Note nous montrons que l'équation (1), qui s'écrit plus simplement sous la forme (3), s'intègre pour une forme quelconque de la fonction $a(x)$.

En effet, l'équation (3) admet la fonction

$$\varepsilon_1 = a(x)$$

comme une solution particulière.

La solution générale de l'équation (3) est donnée par (4), où C_1 et C_2 désignent des constantes d'intégration.

2. Si l'on pose

$$a(x) = exp\left(-\frac{1}{3}\int f(x)\,dx\right),$$

l'équation (3) prend la forme (6) et présente un cas particulier de l'équation (7), intégrée par H. Görtler[1]). Or, en posant

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

l'équation (7) est précisément l'équation (6).

Le résultat de Görtler en question présente un cas particulier de notre proposition suivante:

L'équation différentielle

$$FHy'' + (F'H + FI + GH)y' + (G'H + GI)\,y = 0$$

$$(F,\ G,\ H,\ I = \text{fonctions de } x)$$

est réductible au système intégrable

$$Fy' + Gy = z,$$

$$Hz' + Iz = 0.$$

Si l'on pose

$$F \equiv 1,\quad G = -\lambda f(x),\quad H \equiv 1,\quad I \equiv (\lambda + 1) f(x)$$

on retrouve le cas mentionné de Görtler.

---

1) *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233, Differentialgle chung (5).

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ПРИМЕДБА ЗА ДВЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

(Примено на 17 декември 1949 год.)

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

ПРИМЕДБА ЗА ДВЕ ДЕТЕРМИНАНТИ

I

1. Ставајќи една примедба во врска со континуантата што ја посматра Novarese, покрај другото, E. Cesaro[1]) наведува за детерминантата

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} x+a_0+a_1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & x+a_1+a_2 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & x-a_2 & x+a_2+a_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & x+a_{n-1}+a_n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

вредност

$$a_0 a_1 \cdots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + x(\sigma_1 + 4\sigma_2 + \cdots + n^2 \sigma_n) \right] \qquad (2)$$

каде што σ_i значи

$$\sigma_i = \frac{1}{a_0 a_i} + \frac{1}{a_1 a_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-i} a_n}.$$

Дека е горното тврдење неточно, можеме да се увериме развијајќи ја детерминантата по елементите од последниот ред. Ја добиваме рекурзивната формула

$$D_k = (x + a_{k-1} + a_k) D_{k-1} - (x - a_{k-1})^2 D_{k-2} \qquad (3)$$

која што важи за $k = 1, 2, \ldots n$.

---

[1]) E. Cesaro, *Remarques sur un contunuant (Mathesis,* t. II, 1892, p. 5—12*)*.

Израчунавајќи D_1 и D_2 наоѓаме дека се тие функции од прва степен по x и заменети во (3) даваат за D_3 израз кој што претставува функција од трета степен. Резултатот ште е наведен од Cesaro, покажува дека детерминантата треба да биде функција од прва степен по x, што не одговара на стварноста.

2. Ние ќе се постараме да побараме една детерминанта, вредноста што ќе и биде дадена со изразот (2). За таа цел ќе земеме една заоквирна детерминанта и ќе ја развиеме по Cauchy-евиот образец. Познато ни е, дека ако е дадена некоја детерминанта

$$A = |a_{ik}|, \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots n)$$

може да се образува заоквирна детерминанта, додавајќи и по една или повеќе врсти и колони. Ако на A додадеме една колона со елементите x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и една врста со елементите y_k, $k = 1, 2, \ldots n$, така што $x_{n+1} = y_{n+1} = z$, ја добиваме детерминантата B.

Развијајќи ја детерминантата B по елементите на последната врста и колона т.е. по производе $x_i y_k$ и имајќи предвид дека е коефициентот од овој производ комплементарниот минор на минорот

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & x_i \\ y_k & z \end{vmatrix}$$

го добиваме познатиот Cauchy-ев образец

$$B = Az - \Sigma(-1)^{i+k} x_i y_k A_{ik}. \tag{4}$$

Нека е

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix}$$

и нека се $x_i = x$; $y_k = -1$; $z = +1$ елементи што ги допишуваме. Тогаш детерминантата изменета по контурата добива вид

$$B \equiv \begin{vmatrix} a_0+a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & \cdots & 0 & x \\ 0 & -a_2 & a_2+a_3 & \cdots & 0 & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

која што развиена по Cauchy-евиот образец станува

$$B = A + x\Sigma(-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

Но бидејќи е

$$(-1)^{i+k}\Delta_{ik} = \Delta_{ik}$$

за секоје i и k, крајната вредност од заоквирната детерминанта е

$$B = A + x\Sigma\Delta_{ik}.$$

Бидејќи од друга страна е

$$A = a_0 a_1 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

и

$$\Sigma\Delta_{ik} = a_0 a_1 \ldots a_n (\sigma_1 + 4\sigma_2 + \cdots + n^2\sigma_n).$$

каде што σ_i има вредност порано спомната, добиваме

$$B = a_0 a_1 \ldots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + x(\sigma_1 + 4\sigma_2 + \cdots + n^2\sigma_n)\right]$$

а това е изразот што е од Cesaro наведен. Међутоа детерминантите (1) и (5) не се идентични освен во случајот кога е $n = 1, 2$.

3. Ако детерминантата A ја земеме во облик

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a_0+a_2 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a_0 & a_0+a_3 & \cdots & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_0 & a_0 & & a_0+a_n \end{vmatrix}$$

заоквирната детерминанта станува

$$B_1 \equiv \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_0 & a_0 & \cdots & a_0 & x \\ a_0 & a_0+a_2 & a_0 & \cdots & a_0 & x \\ a_0 & a_0 & a_0+a_3 & \cdots & a_0 & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

и развиена по истиот образец дава

$$B_1 = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n \left[\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_0}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)\right].$$

II

4. Под Sardi-ева детерминанта се подразбира детер минантата од облик

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \cdots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1 & x_2 & x_3 & & \alpha_n \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Развивањето на оваа детерминанта лесно се добива со допишувањето на исти елементи на сите колони[1]) или со помош на една друга особена детерминанта[2])

Ќе ја развиеме сега оваа детерминанта, сведувајќи ја на други специјални типови од детерминанти, на кои што израчунавањето изгледа по просто.

Означиме ли ја детерминантата (1) со D_n и извлечеме од елементите на колоните факторите на елементите x_i, ќе добиеме

$$D_n = \Delta_n \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad (3)$$

[1]) Rosace, *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. II, 1895 p. 127.
[2]) A. Hurwitz, *L'intermédiaire des mathématiciens*, t. II, 1895 p. 368.

каде сме со Δ_n означили детерминантата од облик

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \cdot \cdot \cdot 1 \\ 1 & a_2 & 1 \cdot \cdot \cdot 1 \\ 1 & 1 & a_3 \cdot \cdot \cdot 1 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 1 & 1 & 1 \quad a_n \end{vmatrix} \qquad (3)$$

каде е $\left(a_i = \frac{\alpha_i}{x_i}\right)$.

Оваа детерминанта ќе ја израчунаме поаѓајќи од заоквирната детерминанта, во која што основната детерминанта е Δ_n, а елементите на колоните и врстите што ги додаваме -1, додека е задниот елемент $+1$. Развиена по Cauchy-евот образец последнава дава

$$(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1)=\Delta_n-\Sigma(-1)^{i+k}A_{ik}.$$

Бидејќи е

$$\Sigma(-1)^{i+k}A_{ik}=(a_1-1)\ldots(a_n-1)\left[\frac{1}{a_1-1}+\cdots+\frac{1}{a-{}_n1}\right],$$

добиваме

$$\Delta_n=\frac{(\alpha_1-x_1)(\alpha_2-x_2)\ldots(\alpha_n-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n}\left[1+\frac{x_1}{\alpha_1-x_1}+\cdots+\frac{x_n}{\alpha_n-x_n}\right]$$

или земенена во (2), дава

$$D_n=(\alpha_1-x_1)\ldots(\alpha_n-x_n)\left[1+\frac{x_1}{\alpha_1-x_1}+\cdots+\frac{x_n}{\alpha_n-x_n}\right]. \qquad (4)$$

5. Ако од елементите на последната врста ги одземиме елементите што одговараат на претпоследната, од овие претходните и така по ред до втората, ќе добијеме детерминантата

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1-\alpha_1 & \alpha_2-x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2-\alpha_2 & \alpha_3-x_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha_n-x_n \end{vmatrix},$$

која што претставува тип на Escherich-ова детерминанта[1]).

[1]) Да се види, напр. Pascal, *Die Determinanten,* немски превод H. Leitzmann, S. 144.

Вредноста на оваа детерминанта е

$$D_n = \alpha_1(\alpha_2 - x_2)\cdot\cdot\cdot(\alpha_n - x_n)$$
$$+ x_2(\alpha_1 - x_1)\cdot\cdot\cdot(\alpha_n - x_n)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ x_n(\alpha_1 - x_1)\cdot\cdot\cdot(\alpha_{n-1} - x_{n-1})$$

Со додавање и одземање на производот

$$x_1(\alpha_2 - x_2)\cdot\cdot\cdot(\alpha_n - x_n)$$

добиваме (4).

Б. С. ПОПОВ

ПРИМЕЧАНИЕ О НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ

(*Вывод*)

В нем дается одна исправка в связи с определителем (1) который рассматривает Чезаро.

B. S. POPOV

REMARQUES SUR QUELQUES DÉTERMINANTS*)

(*Résumé*)

1. E. Cesàro[1]) avait assigné au determinant

$$D_n = \begin{vmatrix} x+a_0+a_1 & x-a_1 & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & x+a_1+a_2 & x+a_2 & \dots & 0 \\ 0 & x-a_2 & x+a_2+a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

*) Les renvois bibliographiques se rapportent à même article écrit en langue macedonienne.

considéré par Novarese[2]), la valeur suivante

$$a_0 a_1 \ldots a_n \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{a_\nu} + x\nu^2 \sigma_\nu \right), \tag{1}$$

où l'on a posé

$$\sigma_i = \sum_{\nu=0}^{n-i} \frac{1}{a_\nu \cdot a_{\nu+1}} .$$

Or, en développant se déterminant suivant les éléments de la dernière ligne, on obtient pour D_n la formule de récurrence suivante

$$D_k = (x + a_{k-1} + a_k)\, D_{k-1} - (x - a_{k-1})^2 D_{k-2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Il s'ensuit que la valeur du déterminant considéré ne correspond aux valeurs (1) que pour $n=1$ et $n=2$, tandis que pour $n \geqslant 3$ ces valeurs en diffèrent, étant donné que, d'après la formule de récurrence, D_n ne peut être un polynome du premier degré en x lorsque $n \geqslant 3$.

Par contre, la valeur (1) correspond au déterminant

$$B(x) = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 & x \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_2 & \ldots\ldots\ldots & 0 & x \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \ldots\ldots\ldots & 0 & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots\ldots\ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

que l'on obtient en encadrant le déterminant

$$B = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 & -a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 & -a_1 & \ldots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 + a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} + a_n \end{vmatrix} .$$

On a, en effet,

$$B(x) = a_0 a_1 \ldots a_n \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{1}{a_\nu} + x\nu^2 \sigma_\nu \right).$$

L'on déduit cette valeur de $B(x)$ en partant de la formule connue de Cauchy

$$A(x_i, y_k, z) = Az - \Sigma(-1)^{i+k} x_i y_k A_{ik}, \tag{2}$$

où A désigne le déterminant

$$A = |a_{ik}|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$A(x_i, y_k, z)$ le déterminant obtenu en encadrant le déterminant A, en y ajouttant comme dernière collonne les x_i et comme dernière ligne les y_k, et en y posant

$$x_{n+1} = y_{n+1} = z,$$

et où A_{ik} désigne le mineur complémentaire au mineur

$$\begin{vmatrix} a_{ik} & x_i \\ y_k & z \end{vmatrix}.$$

En partant de la formule (2), l'on peut de même obtenir une expression semblable à celle de $B(x)$, donnant la valeur du déterminant que l'on obtient en encadrant le déterminant

$$C = \begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_0 & a_0 & \cdots\cdots & a_0 \\ a_0 & a_0+a_2 & a_0 & \cdots\cdots & a_0 \\ a_0 & a_0 & a_0+a_3 & \cdots\cdots & a_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_0 & a_0 & \cdots\cdots & a_0+a_n \end{vmatrix}.$$

On a, en effet, d'après la notation précédente,

$$C(x-1, 1) = a_0\, a_1\, a_2, \ldots, a_n \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{a_\nu} \right\}.$$

2. En partant de la formule (2) de Cauchy, on peut de même obtenir la valeur du déterminant de Sardi, (voir de même Rosace[1]) et Hurwitz[2]).

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & \alpha_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \alpha_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\Delta = x_1\, x_2, \ldots, x_n\, D, \tag{3}$$

ayant posé

$$a_i = \frac{\alpha_i}{x_i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{4}$$

et

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

En encadrant ce dernier déterminant par

$$x_i = y_k = -1 \quad \text{et} \quad z = 1,$$

c. à d. en considérant, d'après la notation précédente, le déterminant

$$D(-1, -1, 1),$$

et en lui appliquant la formule (2) de Cauchy, l'on obtient pour le déterminant D la valeur

$$D = (a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_n - 1)\left[1 + \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1}\right],$$

et d'où l' on déduit, d'après (3) et (4), que

$$\Delta = (\alpha_1 - x_1)\ldots(\alpha_n - x_n)\left[1 + \frac{x_1}{\alpha_1 - x_1} + \cdots + \frac{x_n}{\alpha_n - x_n}\right]. \qquad (5)$$

Remarquons, enfin, qu'en soustrayant les éléments de chaque ligne à ceux de la ligne précédente, le déterminant Δ se reduit à celui de Escherich, (voir Pascal)[1])

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 - \alpha_1 & \alpha_2 - x_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 - x_2 & \alpha_3 - x_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_n - x_n \end{vmatrix},$$

dont la valeur est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta = \alpha_1 (\alpha_2 - x_2) & \;\ldots\; (\alpha_n - x_n) \\ + x_2 (\alpha_1 - x_1) & \;\ldots\; (\alpha_n - x_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ + x_n (\alpha_1 - x_1) & \;\ldots\; (\alpha_{n-1} - x_{n-1}), \end{aligned}$$

et qui est identique à l'expression (5).

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

ПОСТУПАК ЗА ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИЈУМА ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ЧИЈИ КОЕФИЦИЈЕНТИ ИМАЈУ ОБЛИКЕ УНАПРЕД ДАТЕ

(Примљено 29 децембра 1949 год.)

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

ПОСТУПАК ЗА ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИЈУМА ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ЧИЈИ КОЕФИЦИЈЕНТИ ИМАЈУ ОБЛИКЕ УНАПРЕД ДАТЕ

УВОД

1. Линеарне диференцијалне једначине играју важну улогу у многобројним техничким, физичким и астрономским проблемима. Стога је проучавању тих једначина посвећена изванредна пажња. О линеарним једначинама постоје специјални уџбеници[1]) и приручници[2]). Неке линеарне једначине специјалног типа, које су од већег значаја у теориским и практичним питањима, изазвале су такав интерес, да о њима данас постоји богата литература. Такве су, на пример, диференцијалне једначине:

1° B e s s e l-ова једначина[3]):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (1)$$

$$(\nu = \text{Const});$$

---

[1]) *Видети*, на пример,

L. H e f t e r, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen*, Teubner, Leipzig, 1894, XIV+258 S.

[2]) *Видети*, на пример,

L. S c h l e s i n g e r, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. I (1895), XX+486 S., Bd. II_1 (1897), XVIII+532 S., Bd. II_2 (1898), XIV+446 S., Leipzig, Teubner.

[3]) *Видети*, на пример,

E. K a m k e, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Auflage, Leipzig, 1944, S. 437, Gl. 2.162.

Ово дело биће у будуће цитирано укратко са K a m k e I. Ознака S. 437, Gl. 2.162 значи да се односна једначина налази на страни 437 и да је нумерисана са 2.162.

2⁰ Hill-ова једначина[1]):

$$y'' + [\Phi(x) + \lambda] y = 0, \tag{2}$$

где је

$$\lambda = \text{Const},$$

Φ = периодична функција променљиве x;

3⁰ Хипергеометриска једначина[2]):

$$x(x-1) y'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma] y' + \alpha\beta y = 0 \tag{3}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = \text{Const});$$

4⁰ Legendre-ова једначина[3]);

$$(x^2 - 1) y'' + 2xy' - \nu(\nu+1) y = 0 \tag{4}$$

$$(\nu = \text{Const});$$

5⁰ Laplace-ова једначина[4]):

$$(a_2 x + b_2) y'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_0 x + b_0) y = 0 \tag{5}$$

$$(a_\nu, \ b_\nu = \text{Const});$$

6⁰ Weber-ова једначина[5]):

$$4 y'' = (x^2 + a) y \tag{6}$$

$$(a = \text{Const});$$

7⁰ Mathieu-ова једначина[6]):

$$y'' + (a \cos 2x + b) y = 0 \tag{7}$$

$$(a, \ b = \text{Const});$$

8⁰ Lamé-ова једначина[7]):

$$y'' + (a\, sn^2 x + b) y = 0 \tag{8}$$

$$(a, \ b = \text{Const});$$

9⁰ Конфлуентна хипергеометриска једначина[8])

$$xy'' + (b - x) y' - ay = 0 \tag{9}$$

$$(a, \ b = \text{Const}).$$

---

[1]) Kamke I, S. 410, Gl. 2.30.
[2]) Kamke I, S. 465, Gl. 2.260.
[3]) Kamke I, S. 455, Gl. 2.240.
[4]) Kamke I, S. 434, Gl. 2.145.
[5]) Kamke I, S. 421, Gl. 2.87.
[6]) Kamke I, S. 404, Gl. 2.22.
[7]) Kamke I, S. 410, Gl. 2.27.
[8]) Kamke I, S. 427, Gl. 2.113.

2. Kamke ова збирка[1]) која садржи преко 1600 обичних диференцијалних једначина, поређаних лексиграфски, даје преглед до сада познатих резултата у математичкој литератури о тим једначинама.

Анализирајући наведену збирку, закључује се да она има великих празнина, чак и у случају када се ради о линеарним диференцијалним једначинама којима је посвећена огромна литература.

Тако, на пример, посматрајмо диференцијалну једначину

$$y'' + (ax+b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0, \qquad (10)$$

где су a, b, α, β, γ ма какве константе.

У случају када је

$$\alpha = 0,$$

једначина (10) припада типу Laplace-ових једначина (5).

У Kamke-овој збирци налазе се о једначини (10) ови подаци:

1° Сменом[2])

$$y = u(x)\,exp\,(sx^2),$$

где је s решење једначине

$$4s^2 + 2as + \alpha = 0,$$

диференцијална једначина (10) добија вид

$$u'' + [(a+4s)\,x + b]\,u' \qquad (11)$$
$$+ [(\beta + 2bs)\,x + (\gamma + 2s)]\,u = 0.$$

Ова једначина спада у класу Laplace-ових једначина (5). Тиме је успостављена веза између једначине (10) и Laplace-ове једначине типа:

$$y'' + (ax+b)\,y' + (Ax+B)\,y = 0.$$

2° Специјални облик једначине (10) јесте Craig-ова једначина[2]):

$$y'' - 2\,(ax+b)\,y' + [(ax+b)^2 - a]\,y = 0, \qquad (12)$$

чије је опште решење

$$y = K_1\,y_1 + K_2\,y_2$$

$(K_1, K_2 =$ интеграционе константе),

[1]) Kamke I, S. 289–6?0 (одељак: *C. Einzel-Differentialgleichungen*).
[2]) Kamke I, S. 417, Gl. 2.55.

где је

$$y_1 = exp\left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right),$$

$$y_2 = y_1'.$$

3[0] Партикуларни случај једначине (10) јесте Forsyth-Jacobsthal-ов пример:

$$y'' + 2\,a\,x\,y' + a^2\,x^2\,y = 0. \tag{13}$$

Ова се једначина интеграли помоћу квадратура[1]).

4[0] Једначине

$$y'' + 4\,xy' + (4\,x^2 + 2)\,y = 0, \tag{14}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 1)\,y = 0, \tag{15}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 2)\,y = 0, \tag{16}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 3)\,y = 0 \tag{17}$$

припадају типу (10) и све су оне интеграбилне[2]).

5[0] Једначина[3])

$$y'' - 4\,xy' + (3\,x^2 + 2n - 1)\,y = 0, \tag{18}$$

сменом

$$y = e^{x^2}\,u\,(x),$$

постаје

$$u'' - (x^2 - 2n - 1)\,u = 0$$

и припада класи Weber-ових једначина[4])

$$u'' - (x^2 + a)\,u = 0.$$

6[0] Једначина[5])

$$y'' - (a^2\,x^2 + a)\,y = 0 \tag{19}$$

као и њен специјални случај[6])

$$y'' - (x^2 + 1)\,y = 0 \tag{20}$$

јесу интеграбилне.

---

[1]) Kamke I, S. 416, Gl. 2.53.
[2]) Kamke I, S. 415, Gl 2.47; S. 416, Gl. 2.49; Gl. 2.50; Gl. 2.51.
[3]) Kamke I, S. 415, Gl. 2.48.
[4]) Kamke I, S. 400, Gl. 2.12.
[5]) Kamke I, S. 401, Gl. 2.13.
[6]) Kamke I, S. 400, Gl. 2.11

Исти је случај и са једначином

$$y'' - (x^2 + 3)\, y = 0 \tag{21}$$

коју је интегралио Goldscheider[1]).

7° Једначина[2])

$$y'' + xy' + (bx^2 + a)\, y = 0 \tag{22}$$

интеграбилна је у ова два случаја:

$b = \frac{1}{4}, \quad a \neq \frac{1}{2}$ (Kamke-ов случај);

$b = \frac{1}{4}, \quad a = \frac{1}{2}$ (Goldscheider-ов случај).

3. Из изнетог се види да је интеграција једначине (10) помоћу квадратура позната у малом броју случајева. Стога је од интереса тражити нове критеријуме интеграбилитета те једначине.

У овој расправи наводимо доста опште случајеве у којима је једначина (10) интеграбилна и показујемо да готово све једначине наведене у § 2 имају *заједничку особину: да се могу свести на систем једначина облика*

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + (\lambda_1 x + \mu_1)\, y = z, \\ &\frac{dz}{dx} + (\lambda_2 x + \mu_2)\, z = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где су

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \mu_1, \ \mu_2$$

константе које ћемо одредити.

4. У овој расправи дајемо један поступак за формирање интеграбилних линеарних једначина **одређеног типа,** на пример (10). Тај поступак који је општијег карактера састоји се у овоме.

Посматрајмо линеарну диференцијалну једначину реда n, одређеног типа,

$$\varphi_0(x)\, y^{(n)} + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n-1}(x)\, y' + \varphi_n(x)\, y = 0, \tag{24}$$

тј. једначину (24) у којој су облици функција

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \ \varphi_n$$

дати унапред.

---

[1]) Kamke I, S. 640, Gl. 2.11a

[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.63a

Упоредо са једначином (24) уочимо систем линеарних једначина првог реда:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}\, y' + f_{12}\, y = y_1 ,\\
&f_{21}\, y_1' + f_{22}\, y_1 = y_2 ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{k1}\, y'_{k-2} + f_{k2}\, y_{k-2} = y_{k-1} ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{n-1,1}\, y'_{n-2} + f_{n-1,2}\, y_{n-2} = y_{n-1} ,\\
&f_{n1}\, y'_{n-1} + f_{n2}\, y_{n-1} = 0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где су f_{kj} функције од x које задовољавају ове услове:

1° $f_{k1} \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$;

2° функције f_{kj} $(k = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2)$ јесу непрекидне у посматраном интервалу независно промењиве;

3° егзистирају изводи

$$f'_{kj} = \frac{df_{kj}}{dx}$$

$$f''_{kj} = \frac{d^2 f_{kj}}{dx^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2)$$

који се појављују у формулама.

Ако се из система (25) елиминише $(n - 1)$ функција

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_{n-1},$$

добија се линеарна диференцијална једначина реда n:

$$\Phi_0(x)\, y^{(n)} + \Phi_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + \Phi_{n-1}(x)\, y' + \Phi_n(x)\, y = 0, \tag{26}$$

у којој коефицијенти $\Phi_\nu(x)$ претстављају полиноме по функцијама

$$f_{kj} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2)$$

и по њиховим изводима

$$\frac{df_{kj}}{dx},\ \frac{d^2 f_{kj}}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} f_{kj}}{dx^{n-1}}.$$

Подесним избором облика функција

$$f_{kj} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2)$$

могу се конструисати такве једначине (26) које ће улазити у класу једначина (24) која је унапред дата.

Диференцијалне једначине (26), класе (24), добијене на наведени начин биће *интеграбилне*, јер је систем диференцијалних једначина (25) интеграбилан за ма какав облик функција

$$f_{kj}(x) \qquad (k=1,2,\ldots,n;\quad j=1,2)$$

уз раније наведена ограничења која се односе на непрекидност и егзистенцију извода тих функција.

Једначина (26) која је формирана по описаном поступку има за партикуларно решење функцију:

$$exp\left(-\int \frac{f_{12}}{f_{11}}dx\right).$$

Систем (25) се интеграли на тај начин што се, полазећи од последње између једначина (25), прво нађе y_{n-1}, затим y_{n-2}, итд. и најзад y.

За диференцијалну једначину (24) која је еквивалентна систему линеарних једначина (25) каже се да је сводљива[1]) (réductible).

Наведеним поступком могу се у знатној мери попунити празнине у Kamke-овој збирци диференцијалних једначина. Већ из тог разлога, поступак о коме је овде реч претставља известан интерес.

Глава прва

КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЈЕДНАЧИНЕ

$$y''+(ax+b)\,y'+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,y=0.$$

5. Упоредо са овом диференцијалном једначином посматрајмо систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} f(x)\,y'+g(x)\,y&=z,\\ z'+h(x)\,z&=0 \end{aligned} \tag{27}$$

[1]) О општем појму *сводљивости* (réductibilité) видети, на пример P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, professées à Stockholm, Paris, 1897, p. 487;

E. Goursat, *Propriétés générales de l'équation* d'Euler *et de* Gauss, Actualités scientifiques et industrielles, fasc 333, 1936 (Paris, Hermann), p. 70.

који је интеграбилан за ма какве облике функција[1]):

$$f(x) \neq 0, \quad g(x), \quad h(x).$$

Елиминацијом z из система (27) добија се:

$$f y'' + (f' + g + f h) y' + (g' + g h) y = 0. \tag{28}$$

Један довољан услов да би једначина (28) била типа (10) јесте:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv 1, \\ g(x) &\equiv \lambda_1 x + \mu_1, \\ h(x) &\equiv \lambda_2 x + \mu_2, \end{aligned} \tag{29}$$

где су $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ма какве константе.

Једначина (28), према (29), постаје:

$$\begin{aligned} y'' &+ [(\lambda_1 + \lambda_2) x + (\mu_1 + \mu_2)] y' \\ &+ [\lambda_1 \lambda_2 x^2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) x + (\mu_1 \mu_2 + \lambda_1)] y = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Поређењем једначина (10) и (30) добивају се релације:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a, \tag{31}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha, \tag{32}$$

$$\mu_1 + \mu_2 = b, \tag{33}$$

$$\mu_1 \mu_2 + \lambda_1 = \gamma, \tag{34}$$

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = \beta. \tag{35}$$

Једначине (31), (32), (33), и (34) имају по параметрима

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$$

ова четири система решења:

Први систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b + R_2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b - R_2}{2}; \end{aligned} \tag{36}$$

Други систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b - R_2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b + R_2}{2}, \end{aligned} \tag{37}$$

---

[1]) Наведени услови у § 4 о непрекидности тих функција као и о егзистенцији њихових извода и овде се претпостављају.

где R_1 и R_2 имају ове вредности:

$$\begin{aligned} R_1 &= +\sqrt{a^2 - 4\alpha}, \\ R_2 &= +\sqrt{b^2 - 4(\gamma - \lambda_1)} \\ &= +\sqrt{b^2 - 4\gamma + 2a + 2R_1}; \end{aligned} \tag{38}$$

Трећи систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b + R_2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b - R_2}{2}; \end{aligned} \tag{39}$$

Четврти систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b - R_3}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b + R_3}{2}, \end{aligned} \tag{40}$$

где је R_1 напред дефинисани израз, а R_3 израз облика:

$$\begin{aligned} R_3 &= +\sqrt{b^2 - 4(\gamma - \lambda_1)} \\ &= +\sqrt{b^2 - 4\gamma + 2a - 2R_1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Када се у релацији (35) замене, једна за другом, вредности (36), (37), (39) и (40), добијају се респективно ове релације:

$$ab - R_1 R_2 = 2\beta, \tag{42}$$

$$ab + R_1 R_2 = 2\beta, \tag{43}$$

$$ab + R_1 R_3 = 2\beta, \tag{44}$$

$$ab - R_1 R_3 = 2\beta. \tag{45}$$

6. Увођење параметра p помоћу релације

$$\alpha = -p(a + p)$$

има за ефекат да R_1 добије прост облик

$$R_1 = a + 2p \tag{46}$$

и тада се корен R_2 може написати овако:

$$R_1 = \sqrt{b^2 - 4(\gamma - a - p)}.$$

Увођењем једног новог параметра q помоћу релације

$$\gamma - a - p = -q(b + q),$$

корен R_2 добија исто тако једноставан облик:

$$R_2 = b + 2q. \tag{47}$$

Системи решења (36) и (37) — први и други систем, с обзиром на (46) и (47), узимају респективно ове просте форме:

Први систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + p, & \mu_1 &= b + q, \\ \lambda_2 &= -p, & \mu_2 &= -q; \end{aligned} \tag{48}$$

Други систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + p, & \mu_1 &= -q, \\ \lambda_2 &= -p, & \mu_2 &= b + q. \end{aligned} \tag{49}$$

Услови (42) и (43) постају респективно:

$$-bp - aq - 2pq = \beta, \tag{50}$$

$$ab + bp + aq + 2pq = \beta. \tag{51}$$

На основу наведених чињеница, могу се формулисати следећа два става:

Став I. *Диференцијална једначина*

$$y'' + (ax + b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0, \tag{52}$$

у случају када је

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a + p), \\ \beta &= -aq - bp - 2pq \\ &= -p\,(b + q) - q\,(a + p), \\ \gamma &= a + p - q\,(b + q), \end{aligned} \tag{53}$$

(a, b, p, q = произвољни параметри),

своդљива је на интеграбилан систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} & y' + [(a + p)\,x + (b + q)]\,y = z, \\ & z' - (px + q)\,z = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Став II. *Диференцијална једначина* (52), *у којој је:*

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a + p), \\ \beta &= ab + bp + aq + 2pq \\ &= (a + p)\,(b + q) + pq, \\ \gamma &= a + p - q\,(b + q), \end{aligned} \tag{55}$$

(a, b, p, q = произвољни параметри),

своддива је на интеграбилан систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} y' + [(a+p)\,x - q]\,y &= z, \\ z' + [-px + (b+q)]\,z &= 0. \end{aligned} \tag{56}$$

7. С обзиром на израз R_1, дефинисан формулом (46), корен R_3 дат релацијом (41) постаје

$$R_3 = \sqrt{b^2 - 4(\gamma + p)}\,.$$

Ако се овде стави

$$\gamma + p = -q\,(b+q),$$

где је q један параметар, има се:

$$R_3 = b + 2q. \tag{57}$$

Системи (39) и (40) — трећи и четврти систем, добијају респективно ове облике:

Трећи систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -p, & \mu_1 &= b+q, \\ \lambda_2 &= a+p, & \mu_2 &= -q; \end{aligned} \tag{58}$$

Четврти систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -p, & \mu_1 &= q, \\ \lambda_2 &= a+p, & \mu_2 &= b+q\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Услови (44) и (45) постају респективно:

$$ab + bp + aq + 2pq = \beta, \tag{60}$$

$$-aq - bp - 2pq = \beta\,. \tag{61}$$

На основу претходних резултата могу се исказати ова два става:

Став III. *Диференцијална једначина*

$$y'' + (ax+b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0, \tag{62}$$

где је:

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a+p), \\ \beta &= ab + bp + aq + 2pq \\ &= (a+p)\,(b+q) + pq, \\ \gamma &= -p - q\,(b+q) \end{aligned} \tag{63}$$

(a, b, p, q = произвољни параметри)

може се свести на интеграбилан систем линеарних једначина:

$$
\begin{aligned}
&y' + [-px + (b+q)]y = z, \\
&z' + [(a+p)\,x - q]\,z = 0.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Став IV. *Диференцијална једначина* (62), *у којој је:*

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -p\,(a+p), \\
\beta &= -aq - bp - 2pq \\
&= -p\,(b+q) - q\,(a+p), \\
\gamma &= -p - q\,(b+q)
\end{aligned}
\tag{65}
$$

сводљива је на интеграбилан систем линеарних једначина облика:

$$
\begin{aligned}
&y' - (px + q)\,y = z, \\
&z' + [(a+p)\,x + (b+q)]\,z = 0.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

8. У наведеним ставовима интеграција једначине (10), под извесним условима, сведена је на интеграцију система линеарних једначина облика:

$$
\begin{aligned}
&y' + (\lambda_1 x + \mu_1)\,y = z, \\
&z' + (\lambda_2 x + \mu_2)\,z = 0.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Из последње једначине излази:

$$z = K_1\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_2 x^2 - \mu_2 x}.$$

Прва једначина даје

$$
\begin{aligned}
y = {} & K_2\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} \\
& + K_1\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} \int exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} x^2 + (\mu_1 - \mu_2)\, x\right] dx,
\end{aligned}
\tag{68}
$$

где су K_1 и K_2 интеграционе константе.

Посматрајмо интеграл

$$J(x, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \int exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} x^2 + (\mu_1 - \mu_2)\, x\right] dx,$$

и наведемо ове његове партикуларне случајеве:

$$J(x, \lambda_1, \lambda_1, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\, e^{(\mu_1 - \mu_2)\,x} \qquad (\mu_1 \neq \mu_2);$$

$$J(x, \lambda_1, \lambda_1, \mu_1, \mu_1) = x.$$

За случај:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 \neq \mu_2,$$

опште решење (68) добија облик

$$y = K_2 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} + K_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_2 x} \tag{69}$$

где је место $\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} K_1$ стављено K_1.

Када је

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2,$$

опште решење (68) добија једноставан облик

$$y = (K_1 x + K_2)\, exp\left(-\frac{\lambda_1}{2} x^2 - \mu_1 x \right). \tag{70}$$

9. Craig-ова једначина (12) сводљива је на систем:

$$\begin{aligned} y' - (ax + b) y &= z, \\ z' - (ax + b) z &= 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Forsyth-Jacobsthal-ова једначина (13) своди се на систем:

$$\begin{aligned} y' + (ax + \sqrt{a})\, y &= z, \\ z' + (ax - \sqrt{a})\, z &= 0. \end{aligned} \tag{72}$$

Диференцијалне једначине (14), (15), (16) и (17) сводљиве су респективно на системе једначина:

$$\left.\begin{aligned} y' + 2xy &= z, \\ z' + 2xz &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned} y' - (2x - i) y &= z, \\ z' - (2x + i) z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

$$(i = \sqrt{-1});$$

$$\left.\begin{aligned} y' - 2xy &= z, \\ z' - 2xz &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned} y' - (2x - 1) y &= z, \\ z' - (2x + 1) z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Једначина

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 + k) = 0 \qquad (77)$$
$$(k = \text{const})$$

која обухвата једначине (15), (16) и (17), као партикуларне случајеве, своддива је на систем

$$\begin{aligned} y' \quad (2\,x - \sqrt{-k-2})\,y &= z, \\ z' - (2\,x + \sqrt{-k-2})\,z &= 0. \end{aligned} \qquad (78)$$

10. Посматрајмо сада једначину

$$y'' + xy' + (\alpha x^2 + \gamma)\,y = 0 \qquad (79)$$

која је партикуларни случај једначине (10), када је:

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad \beta = 0.$$

Ако је

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \gamma = \frac{1}{2},$$

Goldscheider[1]) је показао да је опште решење једначине (79)

$$y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{-\frac{x^2}{4}} \qquad (80)$$

(C_1, C_2 = константе интеграције).

Kamke[2]) је утврдио да се једначина (79) интеграли такође и у случају када је:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \gamma \neq \frac{1}{2};$$

тада опште решење гласи:

$$y = e^{-\frac{x^2}{4}} \left[C_1\, exp\left(x \sqrt{\frac{1}{2} - \gamma} \right) + C_2\, exp\left(-x \sqrt{\frac{1}{2} - \gamma} \right) \right], \qquad (81)$$

где фигуришу две произвољне константе C_1 и C_2.

Показаћемо сада да једначина (79) има и других случајева интеграбилитета осим оних које су навели Goldscheider и Kamke.

---

[1]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.51a (код Kamke-a штампарска грешка: тамо стоји 2.41a).

[2]) *Видети* претходну примедбу.

Први став, примењен на једначину (79), даје:

$$\alpha = -p(1+p), \quad \beta = -q - 2pq = 0, \quad \gamma = 1 + p - q^2. \tag{82}$$

У вези са решавањем система (82) разликоваћемо два случаја:

$$1^0 \quad q = 0; \qquad 2^0 \quad p = -\frac{1}{2}.$$

Ако је $q = 0$, према (82), има се:

$$\alpha = -p(1+p), \quad \gamma = 1 + p, \tag{83}$$

или, после елиминације параметра p,

$$\gamma^2 - \gamma + \alpha = 0. \tag{84}$$

Ако коефицијенти α и γ једначине (79) задовољавају услов (84), односно (83), тада се једначина (79) може интегралити по нашој методи, тј. она је сводљива на систем:

$$y' + (1+p)xy = z, \quad z' - pxz = 0 \tag{85}$$

који је интеграбилан за ма какво p.

За $\alpha = \frac{1}{4}$, једначина (84) има двојни корен $\gamma = \frac{1}{2}$. Тако смо добили Goldscheider-ов случај као партикуларни случај нашег резултата.

2^0 Када је $p = -\frac{1}{2}$, релације (82) дају:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \qquad \gamma = \frac{1}{2} - q^2. \tag{86}$$

То је управо случај интеграбилитета који је навео Kamke.

За вредности (86) једначина (79) сводљива је на систем:

$$y' + \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{2} - \gamma}\right)y = z, \quad z' + \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{1}{2} - \gamma}\right)z = 0. \tag{87}$$

Овај систем даје за y решење у коначном облику (случај $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$ дискутован у § 8) које је идентично са Kamke-овим (81).

На основу изложеног видимо да је једначина (79) интеграбилна ако између α и γ постоји веза

$$\alpha = \gamma - \gamma^2. \tag{88}$$

Према томе, *диференцијална једначина*

$$y'' + xy' + [(\gamma - \gamma^2) x^2 + \gamma] y = 0$$

(γ = произвољна константа)

може се интегралити помоћу квадратура.

Уочимо, на пример, једначину

$$y'' + xy' - (6x^2 + 3) y = 0 \tag{89}$$

која не спада у случај Kamke-ов, јер је овде

$$\gamma = -3$$

и, према (88),

$$\alpha = -6.$$

Једначина (89) своδљива је на интеграбилан систем:

$$y' + 3xy = z,$$
$$z' - 2xz = 0.$$

За $\gamma = 4$, из (88) излази $\alpha = -12$.

Према томе, једначина

$$y'' + xy' + (4 - 12x^2) y = 0$$

сводљива је на интеграбилан систем:

$$y' + 4xy = z$$
$$z' - 3xz = 0.$$

Ако бисмо пошли од ставова II, III, IV, дошли бисмо до потпуно истих закључака као и горе у вези са интеграцијом једначине (79).

11. Применићемо изведене ставове за изналажење критеријума интеграбилитета једначине

$$y'' + (ax + b) y' + (cx + d) y = 0 \tag{90}$$

која спада у класу Laplace-ових једначина (5).

Једначина (90) истовремено је партикуларан случај једначине

$$y'' + (ax + b) y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) y = 0 \tag{91}$$

коју проучавамо у овој глави.

Поређењем једначина (90) и (91) имамо:

$$\alpha = 0, \quad \beta = c, \quad \gamma = d.$$

Применимо редом ставове I, II, III, IV на једначину (90). Став I даје условне једначине:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv -p(a+p) = 0, \\ \beta &\equiv -p(b+q) - q(a+p) = c, \\ \gamma &\equiv a+p-q(b+q) = d. \end{aligned} \tag{92}$$

С обзиром на прву од једначина (92), треба разликовати два случаја:

$$1^0 \quad p = 0; \qquad 2^0 \quad p = -a.$$

Ако је $p = 0$, систем (92) даје:

$$\begin{aligned} aq + c &= 0, \\ a - q(b+q) &= d. \end{aligned} \tag{93}$$

Претпоставићемо да је $a \neq 0$, јер би $a = 0$ повукло за собом $c = 0$ и тада би се једначина (90) свела на линеарну једначину са сталним коефицијентима.

Елиминацијом q из (93) добија се

$$d = a - \frac{c^2}{a^2} + \frac{bc}{a}. \tag{94}$$

Свака Laplace-ова једначина типа (90) чији коефицијенти задовољавају услов (94) сводљива је на интеграбилан систем једначина

$$y' + \left(ax + b - \frac{c}{a}\right)y = z,$$

$$z' + \frac{c}{a}z = 0.$$

Према томе, услов (94) јесте један критеријум интеграбилитета једначине (90).

За $p = -a$, систем (92) се своди на:

$$\begin{aligned} a(b+q) &= c, \\ -q(b+q) &= d. \end{aligned} \tag{95}$$

Елиминацијом q из система (95) налази се:

$$d = \frac{c(ab-c)}{a^2}. \tag{96}$$

Када је услов (96) задовољен, једначина (90) је интеграбилна и сводљива на систем линеарних једначина који је лако образовати.

Применом ставова II, III, IV на једначину (90) не би се дошло до других услова критеријума интеграбилитета ван оних који су дати под (94) и (96).

О једначини (90) Kamke[1]) даје овај резултат:

Сменом промењљивих

$$y(x) = \eta(x) \exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$$

$$\xi = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{ab-2c}{a^2}\right)$$

једначина (90) постаје

$$\eta'' \pm \xi\eta' \pm a^{-3}(c^2 - abc + a^2 d)\eta = 0, \qquad (97)$$

где горњи знаци одговарају случају $a > 0$, а доњи случају $a < 0$.

На основу једначине (97) може се извести закључак, да је једначина (90) интеграбилна ако је задовољен услов:

$$c^2 - abc + a^2 d = 0,$$

што је у складу са критеријумом (96) који смо извели на основу наше методе.

И критеријум интеграбилитета (94) који смо горе извели може се добити на други начин. Заиста, пођимо од једначине

$$\eta'' + \xi\eta' + \eta = 0 \qquad (98)$$

чији је општи интеграл[2])

$$\eta = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(K_1 + K_2\int e^{\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\right),$$

где су K_1 и K_2 интеграционе константе.

За $a > 0$, поређењем једначина (97) и (98) долази се до закључка да ће једначина (90) бити интеграбилна ако је

$$a^{-3}(c^2 - abc + a^2 d) = 1,$$

што се поклапа са нашим условом (94), који важи и за $a < 0$.

---

[1]) Kamke I, S. 416, Gl. 2.54.

[2]) Kamke I, S. 414, Gl. 2.39.

12. У овој глави исцрпно смо изнели примену нашег поступка, који је у уводу (§ 4) само скициран, на истраживање критеријума[1]) интеграбилитета једначине

$$y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0. \tag{99}$$

При томе смо констатовали:

1° *да се тим поступком могу наћи нови критеријуми интеграбилитета;*

2° *да су готово сви познати критеријуми интеграбилитета једначине* (99) *обухваћени, као партикуларни случајеви, ставовима* I – IV;

3° *да је ефективна примена поступка веома једноставна и да је тај поступак подесан за конструисање једначина ради попуњавања* Kamke-*ове збирке диференцијалних једначина,*

Пут којим се дошло до резултата за једначину (99) биће углавном исти и када је реч о једначинама другог типа.

Глава друга

КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЈЕДНАЧИНЕ

$$y'' + (a\, e^{sx} + b)\, y' + (A\, e^{2sx} + B\, e^{sx} + C)\, y = 0.$$

13. Поставимо сада задатак да, применом нашег поступка нађемо критеријуме интеграбилитета диференцијалне једначине

$$y'' + (a\, e^{sx} + b)\, y' + (A\, e^{2sx} + B\, e^{sx} + C)\, y = 0, \tag{100}$$

---

[1]) Други критеријуми интеграбилитета једначине (10), осим оних наведених горе, могу се добити ако се пође, на пример, од једначине (28) у којој је

$$f(x) \equiv \prod_{\nu=1}^{\nu=s} (x - k_\nu),$$

$$g(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=s+2} \lambda_\nu x^{s-\nu+2},$$

$$h(x) \equiv \mu_1 x + \mu_2$$

и ако се параметри

$$s,\ k_\nu,\ \lambda_\nu,\ \mu_\nu$$

потчине извесним условима (које овде не износимо) на основу којих се полиноми

$$f' + g + fh, \quad g' + gh$$

(f, g, h имају горе дефинисане изразе) могу поделити полиномом f без остатка. Тада се има један веома генералан критеријум интеграбилитета једначине (10).

где су: s, a, b, A, B, C ма какве константе, уз ова ограничења:

1° $s \neq 0$;

2° a, A, B нису једновремено једнаки нули.

Систем линеарних једначина који се може довести у кореспонденцију са једначином (100) има облик

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1 e^{sx} + \mu_1) y &= z, \\ z' + (\lambda_2 e^{sx} + \mu_2) z &= 0, \end{aligned} \tag{101}$$

где су

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \mu_1, \ \mu_2$$

константе.

Елиминацијом z из система (101) налази се:

$$\begin{aligned} y'' + [(\lambda_1 + \lambda_2) e^{sx} + (\mu_1 + \mu_2)] y' \\ + [\lambda_1 \lambda_2 e^{2sx} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s) e^{sx} + \mu_1 \mu_2] y = 0. \end{aligned} \tag{102}$$

После поређења једначина (100) и (102), долази се до система једначина:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= A, \\ \mu_1 + \mu_2 &= b, \\ \mu_1 \mu_2 &= C, \\ \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s &= B. \end{aligned} \tag{103}$$

Параметри $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ дефинисани су једначинама

$$\begin{aligned} \lambda^2 - a\lambda + A &= 0, \\ \mu^2 - b\mu + C &= 0, \end{aligned} \tag{104}$$

које треба решити по λ и μ.

Тако нађени параметри

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \mu_1, \ \mu_2$$

у функцији од

$$a, \ b, \ A, \ C$$

треба да задовољавају услов

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s = B, \tag{105}$$

а то је пета једначина система (103).

Скуп једначина (104) даје ова четири система решења:

I. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b+R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b-R_2}{2}; \tag{106}$$

II. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b-R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b+R_2}{2}; \tag{107}$$

III. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b+R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b-R_2}{2}; \tag{108}$$

IV. *систем:*

$$\lambda_1 = \frac{a-R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b-R_2}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{a+R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b+R_2}{2}, \tag{109}$$

где је

$$R_1 = +\sqrt{a^2-4A},$$
$$R_2 = +\sqrt{b^2-4C}. \tag{110}$$

Вредностима (106), (107), (108), (109) одговарају респективно ови услови које морају да задовољавају параметри што се јављају у једначини (100):

$$s(a+R_1)+ab-R_1 R_2 = 2B, \tag{111}$$
$$s(a+R_1)+ab+R_1 R_2 = 2B, \tag{112}$$
$$s(a-R_1)+ab+R_1 R_2 = 2B, \tag{113}$$
$$s(a-R_1)+ab-R_1 R_2 = 2B, \tag{114}$$

где су R_1 и R_2 дефинисани формулама (110).

Из претходног се види да су од шест коефицијената s, a, b, A, B, C пет произвољни.

Нумерички пример. Једначина

$$y'' + (4\,e^{sx} + 7)\,y' + (3\,e^{2sx} + 5\,e^{sx} + 10)\,y = 0 \tag{S}$$

биће сводљива ако s има једну од следећих вредности:

$$-6, \quad -12, \quad -4, \quad -2.$$

Овим вредностима s одговарају четири диференцијалне једначине облика (S) које се своде респективно на ове системе:

1° за $s = -6$ имамо:

$$y' - (e^{-6x} + 2)\,y = z,$$
$$z' + (3\,e^{-6x} + 5)\,z = 0;$$

2° за $s = -12$ имамо:

$$y' + (e^{-12x} + 5)\,y = z,$$
$$z' + (3\,e^{-12x} + 2)\,z = 0;$$

3° за $s = -4$ имамо:

$$y' + (3\,e^{-4x} + 2)\,y = z,$$
$$z' + (e^{-4x} + 5)\,z = 0;$$

4° за $s = -2$ имамо:

$$y' + (3\,e^{-2x} + 5)\,y = z,$$
$$z' + (e^{-2x} + 2)\,z = 0.$$

14. Да би изрази били што једноставнији, слично као у првој глави, увешћемо два параметра: p и q.

Ставимо

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a + p), \\ C &= -q\,(b + q), \end{aligned} \tag{115}$$

па услови (111) – (114) постају респективно:

$$(M_1) \equiv (a + p)\,s - 2\,pq - aq - bp = B,$$
$$(M_2) \equiv (a + p)\,s + ab + aq + bp + 2\,pq = B,$$
$$(M_3) \equiv -ps + ab + aq + bp + 2\,pq = B,$$
$$(M_4) \equiv -ps - aq - bp - 2\,pq = B.$$

На основу (115), формуле (106) – (109) добијају респективно ове облике у матричној форми:

I. *систем:*

$$M=\begin{Vmatrix} a+p & b+q \\ -p & -q \end{Vmatrix}\equiv M_1;$$

II. *систем:*

$$M=\begin{Vmatrix} a+p & -q \\ -p & b+q \end{Vmatrix}\equiv M_2;$$

III. *систем:*

$$M=\begin{Vmatrix} -p & b+q \\ a+p & -q \end{Vmatrix}\equiv M_3;$$

IV. *систем:*

$$M=\begin{Vmatrix} -p & -q \\ a+p & b+q \end{Vmatrix}\equiv M_4,$$

где је са M означена матрица:

$$M=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}.$$

За израз B дефинисан једном од формула (M_k) и за матрицу M_k са истим индексом казаћемо да су *кореспондентни.*

15. На основу напред изнетих чињеница могућно је формулисати овај став:

Став V. *Дифененцијална једначина* (100), *под условом:*

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a+p), \\ C &= -q\,(b+q) \\ B &= (M_k) \end{aligned} \tag{116}$$

(s, a, b, p, q = произвољни параметри)

сводљива је на систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1 e^{sx} + \mu_1)\,y &= z, \\ z' + (\lambda_2 e^{sx} + \mu_2)\,z &= 0, \end{aligned} \tag{117}$$

где је матрица

$$M=\begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}$$

једнака матрици M_k *која је у кореспонденцији са изразом* $B = (M_k)$.

Овај став садржи у себи четири подстава с обзиром на то да је:

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Сада ћемо интегралити систем (117): из друге од тих једначина налази се:

$$z = \Lambda_1 \, exp\left(-\frac{\lambda_2}{s} e^{sx} - \mu_2 x\right), \tag{118}$$

(Λ_1 = интеграциона константа).

Из прве од једначина (117), водећи рачуна о (118), добија се:

$$y = \Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \tag{119}$$

$$+ \Lambda_1 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \int exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s} e^{sx}\right) \cdot exp\left[(\mu_1 - \mu_2)\, x\right] dx$$

(Λ_2 = интеграциона константа).

Ако је

$$s = \mu_1 - \mu_2,$$

квадратура у (119) може се извршити и тада је:

$$y = \Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \tag{120}$$

$$+ \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \cdot exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s} e^{sx}\right),$$

где је

$$s = \mu_1 - \mu_2.$$

Решењу (120) може се дати овај облик:

$$y = e^{-\mu_1 x} \left[\Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx}\right) + \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} exp\left(-\frac{\lambda_2}{s} e^{sx}\right)\right]$$

$$(s = \mu_1 - \mu_2).$$

Ако је

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

тада (119) постаје:

$$y = \Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right)$$

$$+ \frac{\Lambda_1}{\mu_1 - \mu_2} exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right) \cdot exp\left[(\mu_1 - \mu_2)\, x\right]$$

$$(\mu_1 \neq \mu_2)$$

тј.

$$y = exp\left(-\frac{\lambda_1}{s}e^{sx}\right)\left(\Lambda_2 e^{-\mu_1 x} + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}e^{-\mu_2 x}\right). \qquad (121)$$

У случају када је истовремено:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \mu_1 = \mu_2,$$

тада (119) добија следећи једноставан облик:

$$y = (\Lambda_1 x + \Lambda_2)\, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s}e^{sx} - \mu_1 x\right). \qquad (122)$$

16. H. Görtler[1]) посматрао је један партикуларни случај једначине (100), наиме случај када је:

$$s = 1$$

и показао је да једначина

$$y'' + (a e^{x} + b)\, y' + (A e^{2x} + Be^{x} + C)\, y = 0, \qquad (123)$$

где је:

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a + p), \\ B &= -aq - bp - 2\,pq - p, \\ C &= -q\,(b + q) \end{aligned} \qquad (124)$$

(p, q, a, b = произвољни параметри)

има као партикуларно решење функцију

$$exp\,(p\,e^{x} + qx).$$

Görtler-ов случај обухваћен је нашим критеријумом интеграбилитета једначине (100) који је дат ставом V. Заиста, ако се у ставу V посматра случај

$$s = 1, \quad k = 4,$$

има се резултат који је дао Görtler.

Критеријум дат ставом V садржи исто тако, као партикуларне случајеве, разне резултате које су навели Craig, Conte, Görtler, Kamke и други.

---

[1]) *Ergänzungen zu* Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* Bd. 22.1942 S. 233–234).

Тако, на пример, једначина

$$a^2y'' + a(a^2 - 2b\,e^{-ax})\,y' + b^2\,e^{-2ax}\,y = 0$$

$$(a,\ b = \text{Const}),$$

коју је интегралио Craig[1]), сводљива је на систем:

$$y' - \left(\frac{b}{a}e^{-ax} - a\right)y = z,$$

$$z' - \frac{b}{a}e^{-ax}\,z = 0$$

$$(a \neq 0).$$

L. Conte[2]) је показао да је једначина

$$y'' + ay' + b\,e^{-2ax}y = 0,$$

интеграбилна.

Та једначина сводљива је на систем:

$$y' + (\sqrt{-b}\,e^{ax} + a)\,y = z,$$

$$z' - \sqrt{-b}\,e^{ax}\,z = 0$$

Једначина[3])

$$y'' - (2\,e^{x} + 1)\,y' + e^{2x}y = 0,$$

коју су интегрирали Morris и Brown, сводљива је на систем

$$y' - e^{x}\,y = z,$$

$$z' - (e^{x} + 1)\,z = 0$$

или на систем

$$y' - (e^{x} + 1)\,y = z,$$

$$z' - e^{x}\,z = 0.$$

Диференцијалне једначине[4])

$$y'' + y' + e^{-2x}\,y = 0, \qquad (125)$$

$$y'' - y' + e^{2x}\,y = 0 \qquad (126)$$

такође су сводљиве.

---

[1]) Kamke I, S. 422, Gl. 2.90.

[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.37b. *Видети* такође: *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 6—7, 1937—1938, p. 119—125.

[3]) Kamke I, S 418, Gl. 2.63.

[4]) Kamke I, S. 412, Gl 2.33, Gl. 2.34.

Једначина (125) може се свести на систем:

$$y' + i e^{-x} y = z,$$
$$z' - (i e^{-x} - 1) z = 0$$

или на систем

$$y' - i e^{-x} y = z,$$
$$z' + (i e^{-x} + 1) z = 0$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

Једначина (126) је сводљива на систем:

$$y' + i e^{x} y = z,$$
$$z' - (i e^{x} + 1) z = 0$$

или на систем

$$y' - i e^{x} y = z,$$
$$z' + (i e^{x} - 1) z = 0$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

17. Узмимо сада једначину

$$y'' + (a e^{sx} + b) y' + (B e^{sx} + C) y = 0, \qquad (127)$$

која је специјалан случај једначине (100).

Применимо став V на једначину (127); овом приликом им ћемо да разликујемо четири случаја:

I. *случај*. Пошто је овде

$$A = 0,$$

имамо

$$-p (a + p) = 0.$$

За $p = 0$, има се

$$B = a (s - q),$$
$$C = -q (b + q),$$

и једначина (127), у томе случају, своди се на систем:

$$y' + [a e^{sx} + (b + q)] y = z,$$
$$z' - qz = 0.$$

За $p = -a$ налази се:

$$B = a(b+q)$$
$$C = -q(b+q)$$

и тада се једначина (127) своди на систем

$$y' + (b+q)\,y = z,$$
$$z' + (a\,e^{sx} - q)\,z = 0.$$

II. *случај.* Поступајући као у претходном случају, може се формулисати овај резултат:

1° Једначина (127), где је

$$B = a(s+b+q),$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем

$$y' + (a\,e^{sx} - q)\,y = z,$$
$$z' + (b+q)\,z = 0.$$

2° Једначина (127), где је

$$B = -aq,$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' - qy = z,$$
$$z' + (a\,e^{sx} + b + q)\,z = 0.$$

III. *случај.* 1° Једначина (127) у којој је

$$B = a(b+q),$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' + (b+q)\,y = z,$$
$$z' + (a\,e^{sx} - q)\,z = 0.$$

2° Једначина (127) у којој је:

$$B = a(s-q),$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' + [a\,e^{sx} + (b+q)]\,y = z,$$
$$z' - qz = 0.$$

IV. *случај.* 1° Једначина (127), где је

$$B = -aq,$$
$$C = -q(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' - qy = z,$$
$$z' + (a e^{sx} + b + q) z = 0.$$

2° Једначина (127), где је

$$B = a(s+b+q),$$
$$C = -q(b+q), \tag{128}$$

своди се на систем:

$$y' + (a e^{sx} - q) y = z,$$
$$z' + (b+q) z = 0.$$

У сва четири горе посматрана случаја:

a, b, p, q = произвољни параметри.

Görtler[1]) је показао да је једначина

$$y'' + (a e^x + b) y' + (B e^x + C) y = 0$$

интеграбилна ако је

$$B = a(1+b+q),$$
$$C = -q(b+q).$$

Овај резултат је садржан, као партикуларни случај, у нашем четвртом случају. Заиста, стављајући $s = 1$ у формулама (128), добија се управо Görtler-ов случај.

Ако се претпостави да је $B \neq 0$, закључује се да једначина[2])

$$y'' + by' + (B e^x + C) y = 0$$

није сводљива у прецизираном смислу.

Исти је случај и са једначином[3])

$$y'' + B e^{sx} y = 0.$$

---

[1]) Görtler, S. 233, Gl. 4 (Та расправа је раније цитирана).
[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 237a.
[3]) Kamke I, S. 403, Gl. 2.17.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

СПОСОБ ОБРАЗОВАНИЯ КРИТЕРИУМА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ НАПЕРЕД ДАННУЮ ФОРМУ

(*Вывод*)

1. Рассматриваем линейное диференциальное уравнение порядка n:

$$\varphi_0 \overset{(n)}{y} + \varphi_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + \varphi_{n-1} y' + \varphi_n y = 0, \tag{1}$$

где

$$\varphi_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

являются определенными функциями переменного x.

Одновременно рассматриваем систему линейных уравнений первого порядка

$$f_{k_1} y'_{k-1} + f_{k_2} y_{k-1} = y_k,$$
$$f_{n_1} y'_{n-1} + f_{n_2} y_{n-1} = 0 \tag{2}$$
$$(y_0 = y; \quad k = 1,\ 2, \ldots, n-1),$$

где f_{kj} представляют функции переменного x, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1^0 \quad f_{k_1} \neq 0 \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n);$$
$$2^0 \quad f_{kj} \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n; \quad j=1,\ 2)$$

являются функциями непрерывными и диференцируемыми.

Если исключим $(n-1)$ функцию

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_{n-1}$$

из n уравнений (2), получим одно линейное уравнение порядка n

$$\Phi_0 \overset{(n)}{y} + \Phi_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + \Phi_{n-1} y' + \Phi_n y = 0 \tag{3}$$

в котором функции

$$\Phi_k = \Phi_k(x)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

представляют многочлены по

$$f_{kj},\ f'_{kj}, \ldots, \overset{(n-1)}{f_{kj}}.$$

Каждое уравнение (1), преобразуемое в одну систему вида (2), называется п р и в о д и м ы м.[1])

---

1) Об общем понятии приводимости диференциальных уравнений см.:

1⁰ P. P a i n l e v é, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 487;

2⁰ E. G o u r s a t, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss, Actualités scientifiques et industrielles*, № 333, Paris 1936, p. 70.

Надлежащим выбором произвольных функций f_{kj}, можем систематическим образом составить уравнения типа (1), коэффициенты которых будут функциями от x:

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \ldots \varphi_n$$

и будут заранее определенного вида. Это исполнимо различными способами, что подробно показано в тексте на сербском языке.

В виду того, что систему (2) можно всегда интегрировать при помощи квадратур, то будет возможна и интеграция уравнения (3), полученного, исходя из системы (2).

Предшествующий результат можно обобщить, если вместо выражений вида

$$a_0(x)y'+a_1(x)y,$$

взять за первую часть реляций (2) выражения вида:

$$A_0(x)\,y^{(k)}+A_1(x)\,y^{(k-1)}+\cdots+A_{k-1}(x)\,y'+A_k(x)\,y$$

(k = целое положительное число).

2. Систему (2) можно использовать, например, для изложения всей теории интеграции линейных диференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, потому что эти уравнения приводимы в том смысле, как мы это уже определили.

Если уравнение (1) приводимо, будет приводимо тоже и уравнение

$$\varphi_0 y^{(n)}+\varphi_1 y^{(n-1)}+\cdots+\varphi_n y=\omega(x) \tag{4}$$

и тогда система (2) примет вид ($y_0=y$)

$$\begin{gathered} f_{k1}y'_{k-1}+f_{k2}y_{k-1}=y_k, \\ f_{n1}y'_{n-1}+f_{n2}y_{n-1}=\omega(x) \\ (k=1,\ 2,\ldots,n-1) \end{gathered} \tag{5}$$

Если уравнение (4) приводимо, вместо того, что бы применить прием вариации постоянного, можем использовать способ состоящийся в интеграции системы (5), соответствующей уравнению (4). Рассматриваемая интеграция исполняется, исходя от последнего уравнения системы, приближаясь постепенно к первому уравнению.

$$f_{11}\,y'+f_{12}\,y=y_1.$$

В статье на сербском языке детально применен указанный способ к уравнениям вида:

$$y''+(ax+b)\,y'+(Ax^2+Bx+C)\,y=0,$$

$$y''+\left(a\,e^{sx}+b\right)y'+\left(A\,e^{2sx}+B\,e^{sx}+C\right)y=0,$$

где s, a, b, A, B, C представляют постоянные величины, и показано, что многочисленные случаи интегрируемости, которые были раньше известны, истекают из одного общего источника.

D. S. MITRINOVITCH

PROCÉDÉ DE FORMATION DES CRITÈRES D'INTÉGRABILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS AYANT DES FORMES DONNÉES À L'AVANCE

(*Résumé*)

I.

1. On envisage l'équation différentielle linéaire d'ordre n:

$$\varphi_0\, y^{(n)}+\varphi_1\, y^{(n-1)}+\cdots+\varphi_{n-1}\, y'+\varphi_n\, y=0, \tag{1}$$

où[1])

$$\varphi_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

sont des fonctions données de la variable x.

Parallèlement, on considère le système d'équations linéaires du premier ordre:

$$\begin{aligned} &f_{k1}\, y'_{k-1}+f_{k2}\, y_{k-1}=y_k,\\ &f_{n1}\, y'_{n-1}+f_{n2}\, y_{n-1}=0,\\ &(y_0=y;\quad k=1,\ 2, \ldots, n-1), \end{aligned} \tag{2}$$

où f_{kj} sont des fonctions de x satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $\qquad f_{k1}\neq 0 \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n);$

2° $\qquad f_{kj} \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n;\quad j=1,\ 2)$

sont des fonctions continues et dérivables.

Si l'on élimine les $(n-1)$ fonctions

$$y_1,\ y_2, \ldots, y_{n-1}$$

entre les n équations (2), on trouve une équation linéaire d'ordre n:

$$\Phi_0\, y^{(n)}+\Phi_1\, y^{(n-1)}+\cdots+\Phi_{n-1}\, y'+\Phi_n\, y=0, \tag{3}$$

où les fonctions

$$\Phi_k=\Phi_k(x)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n)$$

sont des polynômes en

$$f_{kj},\ f'_{kj},\ f''_{kj}, \ldots, f_{kj}^{(n-1)}.$$

---

[1]) Dans cette étude les accents désignent des dérivées prises par rapport à la variable x.

Toute l'équation (1), transformable en un système de la forme (2), s'appele réductible[1]).

Par un choix convenable des fonctions arbitraires f_{kj}, on peut construire, d'une manière systématique, des équations du type (1), dont les coefficients-fonctions de x:

$$\varphi_0,\quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

auront des formes assignées par avance. Cela peut se réaliser de diverses manières, ce qui sera illustré dans des pages suivantes.

Le système (2) étant toujours intégrable par quadratures, il en sera de même de l'équation (3), fournie à partir du système (2).

Le résultat précédent peut être généralisé, lorsque dans le premier membre des relations (2) on considère des expressions de la forme

$$A_0(x)\,y^{(k)}+A_1(x)\,y^{(k-1)}+\cdots+A_{k-1}(x)\,y'+A_k(x)\,y$$

$$(k = \text{entier positif})$$

au lieu des expressions de la forme

$$a_0(x)\,y'+a_1(x)\,y.$$

2. Le système (2) peut être employé, par exemple, dans le but d'exposer toute la théorie d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, car ces équations-ci sont réductibles dans le sens déjà précisé.

Si l'équation (1) est réductible, il en est de même de l'équation

$$\varphi_0 y^{(n)}+\varphi_1 y^{(n-1)}+\cdots+\varphi_n y=\omega(x), \tag{4}$$

et dans ce cas le système (2) sera de la forme $(y_0=y)$

$$f_{k1}\, y'_{k-1}+f_{k2}\, y_{k-1}=y_k,$$

$$f_{n1}\, y'_{n-1}+f_{n2}\, y_{n-1}=\omega(x) \tag{5}$$

$$(k=1,\ 2, \ldots, n-1).$$

Dans le cas où l'équation (4) est réductible, on peut utiliser, au lieu de la méthode de variation des constantes arbitraires, le procédé consistant dans l'intégration du système (5) qui correspond à l'équation (4). L'intégration en question s'effectue en partant de la dernière équation du système (5) et en continuant de proche en proche vers la première équation

$$f_{11}\, y'+f_{12}\, y=y_1. \tag{6}$$

1) Sur la notion générale de réductibilité des équations différentielles, *cf.* par exemple:

1° P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 487;

2° E. Goursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, № 333, Paris, 1936, p. 70.

II.

3. Comme première application des remarques indiquées, on propose de trouver des critères d'intégrabilité par quadratures de l'équation linéaire du second ordre

$$y''+(ax+b)\,y'+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,y=0, \tag{7}$$

où a, b, α, β, γ désignent des constantes arbitraires.

Simultanément avec l'équation (7) on considère le système intégrable

$$\begin{aligned} &f(x)\,y'+g(x)\,y=z,\\ &z'+h(x)\,z=0, \end{aligned} \tag{8}$$

d'où il provient, par l'élimination de z,

$$f\,y''+(f'+g+fh)\,y'+(g'+gh)\,y=0. \tag{9}$$

Une condition suffisante pour que l'équation (9) soit de la forme (7) sera:

$$\begin{aligned} &f(x)\equiv 1,\\ &g(x)\equiv \lambda_1 x+\mu_1,\\ &h(x)\equiv \lambda_2 x+\mu_2, \end{aligned} \tag{10}$$

où λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 sont des constantes arbitraires.

L'équation (9), en vertu des expressions (10), prend la forme

$$\begin{aligned} &y''+[(\lambda_1+\lambda_2)\,x+(\mu_1+\mu_2)]\,y'\\ &\quad+[\lambda_1\lambda_2\,x^2+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\,x+(\mu_1\mu_2+\lambda_1)]\,y=0. \end{aligned} \tag{11}$$

De la comparaison des équations (7) et (11), on tire

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2&=a,\\ \lambda_1\lambda_2&=\alpha,\\ \mu_1+\mu_2&=b,\\ \mu_1\mu_2+\lambda_1&=\gamma,\\ \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1&=\beta. \end{aligned} \tag{12}$$

Lorsqu'on désigne par a, b des constantes arbitraires et par p, q deux paramètres introduits pour que les formules soient plus commodes, on peut, après la résolution du système (12), énoncer les résultats suivants:

Proposition I. *L'équation* (7), *dans le cas où*

$$\begin{aligned} \alpha&=-p\,(a+p),\\ \beta&=-aq-bp-2pq,\\ \gamma&=a+p-q\,(b+q), \end{aligned}$$

est réductible au système intégrable

$$\begin{aligned} &y'+[(a+p)\,x+(b+q)]\,y=z,\\ &z'-(px+q)\,z=0. \end{aligned}$$

Proposition II. *L'équation* (7), *avec*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$
$$\beta = (a+p)\,(b+q)+pq,$$
$$\gamma = a+p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y'+[(a+p)\,x-q]\,y=z,$$
$$z'+[-px+(b+q]\,z=0.$$

Proposition III. *L'équation* (7), *avec*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$
$$\beta = (a+p)(b+q)+pq,$$
$$\gamma = -p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y'+[-px+(b+q)]\,y=z,$$
$$z'+[(a+p)\,x-q]\,z=0.$$

Proposition IV. *L'équation* (7), *où*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$
$$\beta = -aq-bp-2pq,$$
$$\gamma = -p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y'-(px+q)\,y=z,$$
$$z'+[(a+p)\,x+(b+q)]\,z=0.$$

4. L'utilité du procédé indiqué, fournissant des critères d'intégrabilité, s'est confirmé déjà par l'équation (7). Les résultats formulés dans les quatre propositions précitées ne se trouvent pas dans le Recueil des équations différentielles de Kamke[1]. D'autre part, de nombreuses équations différentielles particulières du type (7), indiquées chez Kamke, jouissent de la propriété suivante:

1° Elles sont réductibles dans le sens adopté;

2° Elles présentent des cas particuliers dérivant d'une source commune, donnée dans cette étude[2].

A titre d'exemple, prenons l'équation différentielle:

$$y''+xy'+(\alpha x^2+\gamma)\,y=0 \qquad (13)$$

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. 1, 3. Auflage, Leipzig, 1944; *cf.* particulièrement p. 413—417, p. 641.—Dans la suite, ce Traité sera cité, en abrégé, par Kamke.

[2] Ceci est avec détail développé dans le texte serbe de cette étude. *Voir,* particulièrement, les §§ 9—11 en liaison avec le § 2.

présentant un cas particulier de l'équation (7) pour

$$a=1, \quad b=0, \quad \beta=0.$$

Les cas d'intégrabilité connus de l'équation (13), d'après Kamke[1], sont les deux suivants:

1° $\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma=\frac{1}{2}$ (cas de Goldscheider);

2° $\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma\neq\frac{1}{2}$ (cas de Kamke).

En appliquant à l'équation (13) la proposition I, formulée précédemment, on fournit les résultats suivants qui renferment ceux de Goldscheider et de Kamke, comme des cas particuliers:

1° *Lorsque la condition*

$$\alpha=\gamma(1-\gamma)$$

est satisfaite, l'équation (13), *avec*

$$\alpha=-p(1+p),$$

$$\gamma=1+p$$

(p = paramètre arbitraire)

est réductible au système intégrable

$$y'+(1+p)\,xy=z,$$

$$z'-pxz=0.$$

Au cas particulier $\alpha=\frac{1}{4}$ correspond $\gamma=\frac{1}{2}$ $\left(\text{ici } p=-\frac{1}{2}\right)$, ce qui est le résultat de Goldscheider;

2° *Lorsqu'on a:*

$$\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma=\frac{1}{2}-q^2$$

(q = paramètre arbitraire),

l'équation correspondante (13) *est réductible au système intégrable*

$$y'+\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)y=z,$$

$$z'+\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)z=0,$$

et c'est précisément le cas de Kamke.

Par conséquent, on voit que les équations de Goldscheider et de Kamke sont réductibles et que ces deux cas particuliers de l'équation (13) dérivent aussi d'une source commune.

---

1) Kamke, p. 641.

5. Relativement à l'équation différentielle

$$y''+(a e^{sx}+b)y'+(A e^{2sx}+B e^{sx}+C)y=0, \tag{14}$$

où a, b, s, A, B, C sont des constantes arbitraires, on énonce le résultat suivant:

Proposition V. *Les coefficients* a *et* b *désignant des constantes arbitraires,* A *et* C *étant de la forme*

$$A=-p(a+p),$$

$$C=-q(b+q),$$

où p *et* q *désignent deux paramètres arbitraires, l'équation* (14) *est réductible:*

1⁰ *au système intégrable*

$$y'+\left[(a+p)e^{sx}+(b+q)\right]y=z,$$

$$z'-\left(pe^{sx}+q\right)z=0,$$

dans le cas où

$$B=s(a+p)-2pq-aq-bp;$$

2⁰ *au système intégrable*

$$y'+\left[(a+p)e^{sx}-q\right]y=z,$$

$$z'+\left[-pe^{sx}+(b+q)\right]z=0,$$

dans le cas où

$$B=s(a+p)+ab+aq+bp+2pq;$$

3⁰ *au système intégrable*

$$y'+\left[-pe^{sx}+(b+q)\right]y=z,$$

$$z'+\left[(a+p)e^{sx}-q\right]z=0,$$

dans le cas où

$$B=-sp+ab+aq+bp+2pq;$$

4⁰ *au système intégrable*

$$y'-\left(pe^{sx}+q\right)y=z,$$

$$z'+\left[(a+p)e^{sx}+(b+q)\right]z=0,$$

dans le cas où

$$B=-sp-aq-bp-2pq.$$

Le procédé en question, appliqué à l'équation (14), a fourni la proposition V, ce qui met en évidence de nouveau:

1⁰ que ce procédé pourrait conduire à des résultats de plus en plus intéressants, lorsqu'on l'appliquait d'une manière systématique;

2° que le même procédé est notamment convenable pour un complètement du Recueil de Kamke qui s'est montré déjà si utile dans des recherches relatives à des sciences techniques et appliquées.

6. D'autres critères d'intégrabilité de l'équation (7), en dehors de ceux cités plus haut, s'obtiendront en partant de l'équation (9), dans laquelle les fonctions f, g, h ont, par exemple, les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_s), \\ g(x) &\equiv \lambda_1 x^{s+1} + \lambda_2 x^s + \cdots + \lambda_{s+1} x + \lambda_{s+2}, \\ h(x) &\equiv \mu_1 x + \mu_2 \end{aligned} \tag{15}$$

où les coefficients:

$$\begin{aligned} &k_1, k_2, \dots, k_s; \\ &\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{s+2}; \\ &\mu_1, \mu_2 \end{aligned} \tag{16}$$

sont des constantes arbitraires.

En choisissant les paramètres (16) et le nombre naturel s sous la condition que les polynômes

$$f' + g + fh, \quad g' + gh,$$

déterminés par (15), soient divisibles sans reste par le polynôme f, on trouvera de nouveaux critères d'intégrabilité de l'équation (7).

Nous allons étudier ceci et d'autres questions connexes dans un autre travail.

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

О ЈЕДНОМ КАРАМАТИНОМ УСЛОВУ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА БАЛИСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

(Примљено 29 децембра 1949 год.)

БЛАГОЈ С. ПОПОВ

О ЈЕДНОМ КАРАМАТИНОМ УСЛОВУ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА БАЛИСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ*)

1. Предмет овога рада је балистичка диференцијална једначина

$$(y+\rho)\, y' + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

у случају када $\rho(x)$ има облик

$$\rho(x) = Ae^{nx} + Be^{-nx} + R,$$

где су A, B, R и n константе.

Уопштавајући D'Alembert-ов услов интеграбилитета

$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{n+1} = \frac{R^2}{(2+n)^2}, \tag{2}$$

Карамата[1]) је добио овај услов

$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{k(k+n)} = \frac{R^2}{(2k+n)^2} \tag{3}$$

који се своди на D'Alembert-ов за $k=1$.

Сводећи диференцијалну једначину (1) на Legendre-ову једначину

$$(x^2-1)\, z'' + (cx+b)\, z' + Mz = 0, \tag{4}$$

ми ћемо показати да се услов интеграбилитета последње једначине, наиме

$$k(k-1) + ck + M = 0 \qquad (k\text{-цео број}) \tag{5}$$

---

*) Професори Карамата и Митриновић прочитали су овај рад у рукопису и учинили су ми корисне примедбе.

[1]) J. Карамата, *Весник Друштва математичара и физичара Н. Р. С.* I., Београд, 1949, стр. 72-73, задатак 3.

своди управо на услов интеграбилитета (2) који је навео Карамата.

Затим, пошто се диференцијална једначина (4) може свести на хипергеометриску диференцијалну једначину[2])

$$x\,(1-x)\,y''+[(\gamma-\alpha+\beta+1)]\,y'-\alpha\beta y=0, \tag{6}$$

ми ћемо показати да се општи интеграл диференцијалне једначине (1) може увек изразити помоћу хипергеометриских функција $F\,(\alpha,\beta,\gamma,x)$. С друге стране, познато је да је диференцијална једначина (6) интеграбилна квадратурама, када је један од четири броја[3]) α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ цео број.

Показаћемо да се сваки од ових четири услова интеграбилитета своди на услов (3), када се пређе од диференцијалне једначине (6) на диференцијалну једначину (1).

2. Уношењем функције $\rho\,(x)$ у (1) и сменом

$$e^{nx}=t, \tag{7}$$

добијамо Riccati-еву диференцијалну једначину по промењљивој t, облика

$$(1-y^2)\frac{dt}{dy}-[nAt^2+(nv+nR)\,t+nb]=0.$$

Сменом промењљиве y са x имаћемо диференцијалну једначину

$$(1-x^2)\frac{dt}{dx}-[nAt^3+(nx+nR)\,t+nB]=0. \tag{8}$$

Новом трансформацијом

$$z=exp\left(\int\frac{nA}{(1-x^2)}\,tdx\right) \tag{9}$$

диференцијална једначина (8) постаје

$$(1-x^2)^{\text{‘}}\,z''-[(n+2)\,x+nR]\,(1-x^2)\,z'+n^2\,ABz=0.$$

После увођења нових ознака

$$a=n^2\,AB;\quad r=nR;\quad n+2=m \tag{10}$$

[2]) E. Kamke, *Differentialglechungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, S 22.

[3]) Goursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, 1936, p. 6.

и сменом променљиве z са y имамо једначину

$$(x^2-1)^2 y'' + [(mx+r)(x^2-1)]\, y' + ay = 0, \tag{11}$$

одакле трансформацијом

$$y = (x-1)^p (x-1)^q\, v \tag{12}$$

где су p и q за сада још неодређени параметри, диференцијална једначина (11) после сређивања, постаје

$$\begin{aligned}(x^2-1)^2 z'' + (x^2-1)\,[(mx+r) + 2p(x+1) + 2q(x-1)]\, z' + \\ + p(p-1)(x+1)^2 + 2pq(x^2-1) + q(q-1)(x-1)^2 + \\ + p(mx+r)(x+1) + q(mx+r)(x-1) + a\, z = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Означимо ли са

$$\begin{aligned}P(x) = (p+q)(p+q+m-1)\, x^2 + [2(p^2-q^2) - (m-2)(p-q) + \\ + r(p+q)]\, x + (p-q)^2 - (p+q) + r(p-q) + a,\end{aligned}$$

диференцијална једначина (13) постаје

$$\begin{aligned}(x^2-1)^2 z'' + (x^2-1)\,\{[2(p+q)+m]\, x + 2(p-q) + \\ + r\}\, z' + P(x)\, z = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Параметре p и q можемо изабрати увек тако да буде

$$P(x) = M(x^2-1), \tag{15}$$

где M означава једну константу.

Уношењем ове вредности за $P(x)$ у диференцијалну једначину (14) и увођењем нових ознака

$$\begin{aligned} c &= 2(p+q) + m \\ b &= 2(p-q) + r \end{aligned} \tag{16}$$

добијамо, после скраћивања са (x^2-1), диференцијалну једначину облика

$$(x^2-1)\, z'' + (cx+b)\, z' + Mz = 0. \tag{17}$$

3. Потражимо сада везу између констаната A, B, R и n и ново уведених p, q и M. Идентитет (15) доводи нас до три релације

$$\begin{aligned} &(p+q)(p+q+m-1) = M, \\ &2(p^2-q^2) + (m-2)(p-q) + r(p+q) = 0, \\ &(p-q)^2 + r(p-q) - (p+q) + a = -M. \end{aligned} \tag{18}$$

Одавде добијамо

$$4p = -(m+r-2) \pm \sqrt{(m+r-2)^2 - 4a},$$

$$4q = -(m+r-2) \pm \sqrt{(m-r-2)^2 - 4a},$$

$$M = (p+q)(p+q+m-1),$$

или с обзиром на (10)

$$p = -\frac{n}{4}\{R+1 \pm \sqrt{(R+1)^2 - 4AB}\},$$

$$q = -\frac{n}{4}\{R-1 \pm \sqrt{(R-1) - 4AB}\},$$

$$M = s(s+n+1),$$

где је стављено

$$s = p+q.$$

Елиминацијом $(p-q)$ и M из релација (18) налази се

$$\frac{r^2}{[2(p+q)+m-2]^2} = \frac{a}{(p+q)[(p+q)+m-2]} + 1$$

одакле с обзиром на (10) следује једначина

$$\frac{R^2}{(2s+n)^2} = \frac{AB}{s(s+n)} + \frac{1}{n^2} \tag{19}$$

која је управо истог облика као и услов интеграбилитета (3) који је навео Карамата.

Да би Legendre-ова диференцијална једначина (17) имала за партикуларни интеграл један полином $Q(y)$ степена k, потребно и довољно је да услов

$$k(k-1) + ck + M = 0 \qquad (k = \text{цео број})$$

буде задовољен. Узимајући у обзир релације (10), (16), и (18), овај услов постаје

$$s^2 + (2k+n+1)s + k(k+n+1) = 0,$$

одакле излази

$$s = -k \quad \text{или} \quad s = -(k+n+1).$$

Ако се ове вредности за s унесу у услове (19), добија се очевидно услов интеграбилитета (3) у коме је k замењено респективно са $-k$ и са $k+1$.

У овом случају један партикуларан интеграл балистичке једначине (1) дат је изразом

$$sy - \frac{nRs}{n+2s} + (y^2 - 1)\frac{Q'}{Q} = nAe^{nx},$$

где $Q(y)$ претставља полином степена k, који је један партикуларан интеграл Legendre-ове диференцијалне једначине (17).

4. До истог резултата долазимо, сводећи Legendre-ову диференцијалну једначину (17) сменом

$$z(x) = \eta(\xi), \quad 2\xi = x + 1$$

на једначину

$$\xi(1-\xi)\eta'' + \left(\frac{c-b}{2} - c\xi\right)\eta' - M\eta = 0,$$

тј. на једначину

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{c-b}{2} - cx\right)y' - Mx = 0 \qquad (20)$$

$$(\xi = x, \quad \eta = y).$$

Последња једначина претставља хипергеометриску диференцијалну једначину, чији општи облик гласи

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \qquad (6)$$

где су α, β и γ произвољни, али од x независни бројеви.

Потражимо везу између констаната опште хипергеометриске једначине α, β, γ и констаната b, c, M хипергеометриске једначине (20).

Из (20) и (6) имамо

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 1 &= b, \\ 2\gamma &= c - b, \\ \alpha\beta &= M. \end{aligned} \qquad (21)$$

Прва и трећа од ових једначина, имајући у виду вредности за c и M из (16) односно (18), дају

$$\alpha = s, \quad \beta = s + m - 1.$$

Из друге од једначина (21), а с обзиром на другу од једначина (16) излази

$$\gamma = \frac{2s+m}{2} - \frac{r(m-2)}{2(2s+m-2)}.$$

Имајући у виду вредности констананата r и m из (10), добијамо

$$\alpha = s, \quad \beta = s + n + 1, \quad \gamma = \frac{2s+n+2}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)}. \tag{22}$$

Како је партикуларни интеграл диференцијалне једначине (6) дат хипергеометриским редом, који се краткоће ради означава са $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, један партикуларан интеграл диференцијалне једначине (20) биће дат редом

$$y = F\left(s, s+n+1, \frac{2s+n+2}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)}, x\right)$$

где је s дефинисано са

$$s = p + q.$$

Да бисмо нашли услов интеграбилности диференцијалне једначине (1) помоћу квадратура, потражићемо један партикуларан интеграл једначине (6) у коначном облику.

Из теорије хипергеометриске диференцијалне једначине познато[1]) је да ће хипергеометриска диференцијална једначина имати један партикуларан интеграл облика

$$\begin{aligned} &y = P(x), \\ &y = x^{1-\gamma} P(x), \\ &y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P(x), \\ &y = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} P(x), \\ &(P(x) - \text{полином по } x) \end{aligned} \tag{23}$$

ако је један од бројева α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ цео број.

Применимо сада ове услове на диференцијалну једначину (20).

а) Добијамо прво да α односно s мора бити цео број, позитиван или негативан. При томе чинимо дакле ограничење за произвољно изабране параметре p и q чији је збир s.

Но тако постављени услов за s показује да је веза (19) између коефицијената диференцијалне једначине (1) и s у ствари Караматин услов интеграбилитета диференцијалне једначине (1), замењујући s са k.

[1]) Forsyth-Jacobsthal, *Lehrbuch der Differential-Gleichungen* 1912, S. 221.

Из овога следује да ће диференцијална једначина (20) имати партикуларан интеграл облика (23).

б) Претпоставимо с обзиром на (23) да је s различито од целог броја, а β цео број тј.

$$s+n=k \qquad (k = \text{цео број})$$

одакле добијамо за s вредност

$$s=k-n. \tag{24}$$

Ако се ова вредност за s замени у услов (19), добијамо услов интеграбилитета облика

$$\frac{R^2}{(n-2k)} - \frac{AB}{-k(n-k)} + \frac{1}{n^2}$$

који се своди на (3), где је k замењено са $-k$.

Хипергеометриска једначина имаће и у овом случају један интеграл облика (23). Диференцијална једначина биће интеграбилна, јер је услов (19) односно (3) задовољен.

в) Из услова да $\gamma-\alpha$ буде цео број, изостављајући случај када је s цео број, добијамо

$$\frac{n}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)} = k, \qquad (k = \text{цео број}) \tag{25}$$

Одавде за s налазимо вредност

$$s = \frac{n(R-1)+2k}{2(n-2k)} n.$$

Тако добивена вредност за s унешена у (19) своди последњу једначину на услов интеграбилитета (3) балистичке диференцијалне једначине. Разуме се да вредност за s дата формулом (25) садржи и вредност за s која је добијена из (24) и обратно.

г) Услов да $\gamma-\beta$ буде цео број даје

$$\frac{n}{2} - \frac{n^2 R}{2(2s+n)} = k \qquad (k = \text{цео број}).$$

Одавде налазимо за s вредност

$$s = -\frac{nR+(n+2k)}{2(n+2k)} n,$$

која унешена у (19) своди ову релацију на Караматин услов интеграбилитета (3) диференцијалне једначине (1).

5. Претпоставимо да смо нашли један партикуларан интеграл хипергеометриске диференцијалне једначине (20) и означимо га са

$$\eta = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

где α, β, γ узимају одређене вредности и где је бар један од бројева α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ цео број, односно да је један од услова у § 4 испуњен.

Партикуларни интеграл Legendre-ове диференцијалне једначине биће у том случају

$$= F\left(\alpha, \beta\, \gamma, \frac{x+1}{2}\right)$$

водећи рачуна о смени

$$\eta(\xi) = z(x); \quad 2\xi = x+1. \tag{26}$$

За линеарну диференцијалну једначину, овај партикуларни интеграл добија облик

$$z = (x-1)^p (x+1)^q F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{x+1}{2}\right)$$

ако се има у виду релација (12) и промена y са z.

Параметре p и q одређујемо из (18) према датим вредностима констаната A, B, R и n.

Riccati-ева диференцијална једначина (8) има у овом случају партикуларни интеграл облика

$$t_1 = \frac{\dfrac{d}{dx}\left[(x-1)^p (x+1)^q F\left(\alpha, \beta, \gamma, \dfrac{x-1}{2}\right)\right]}{nA(x-1)^{p-1}(x+1)^{q-1} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \dfrac{x+1}{2}\right)}.$$

Свођењем Riccati-еве диференцијалне једначине помоћу партикуларног интеграла на линеарну, налазимо општи интеграл ове, а одавде и општи интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине.

Смена (7) доводи до општег интеграла балистичке диференцијалне једначине.

6. Пример. На крају ћемо навести један нумерички пример.

Узмимо за параметре p, q и произвољни цео број k, следеће вредности

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = 1, \quad k = -1.$$

У том случају имаћемо према (22)

$$s=\alpha=\frac{3}{2}, \quad \beta=-1, \quad m=-\frac{3}{2}. \tag{27}$$

Из (18) добијамо

$$M=-\frac{3}{2}, \quad r=-\frac{1}{6}, \quad a=\frac{8}{3}$$

или с обзиром на (10)

$$AB=\frac{32}{147}, \quad R=\frac{1}{21}, \quad n=-\frac{7}{2}.$$

Релације (16) дају

$$c=\frac{3}{2}, \quad b=-\frac{7}{6},$$

па имамо за Υ

$$\Upsilon=\frac{4}{3}. \tag{28}$$

Облик балистичке диференцијалне једначине у овом случају је

$$\left(y+e^{-\frac{7}{2}x}+\frac{32}{147}e^{\frac{7}{2}}+\frac{1}{21}\right)y'+y^2-1=0. \tag{29}$$

Сменом

$$e^{-\frac{7}{2}x}=t, \tag{30}$$

добијамо Riccati-еву диференцијалну једначину

$$(y^2-1)\frac{dt}{dy}-\frac{7}{2}t^2+\left(\frac{1}{21}+y\right)t+\frac{32}{147}=0. \tag{31}$$

Нова трансформација

$$t=\frac{2}{7}(1-y^2)\frac{z'}{z}; \quad z=(y-1)^{\frac{1}{2}}(y+1)\,u, \tag{32}$$

доводи до Legendre-ове диференцијалне једначине

$$(y^2-1)\,u''+\left(\frac{3}{2}y-\frac{7}{6}\right)u'-\frac{3}{2}u=0.$$

Ова последња с обзиром на смену (26) прелази у хипергеометриску једначину

$$\xi(\xi-1)\eta'' + \left(\frac{3}{2}\xi - \frac{4}{3}\eta'\right) - \frac{3}{2}\eta = 0,$$

а ту једначину смо могли добити директно с обзиром на (27) и (28).

Партикуларни интеграл последње диференцијалне једначине биће дат изразом

$$\eta = C_1 F\left(\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}, \xi\right),$$

који можемо писати и овако:

$$\eta = C_1 (7 - 9\xi),$$

где је C_1 произвољна константа интеграције.

С обзиром на смене (26) и (32). партикуларни интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине (31) имаће облик

$$t_1 = \frac{1}{7}\,\frac{30y - 45y^2 + 11}{9y - 7}.$$

Општи интеграл Riccati-еве диференцијалне једначине биће

$$\varphi(y)\,[C + \psi(y)]\,(t - t_1) = 1,$$

где је

$$\varphi(y) = (y+1)^{\frac{1}{3}}(y-1)^{-\frac{5}{6}}(9y-7)^2,$$

$$\psi(y) = -\frac{7}{2}\int \frac{dv}{(y+1)(y+1)\,\varphi(y)}.$$

С обзиром на смену (30), општи интеграл балистичке диференцијалне једначине (29) је

$$\varphi(y)\,[C + \psi(y)]\left(e^{-\frac{7}{2}x} - t_1\right) = 1.$$

Ради проверавања добијеног резултата, из последње релације елиминисали смо C и добили једначину облика (1) која одговара у овом случају.

Б. С. ПОПОВ

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ КАРАМАТЫ, О ИНТЕГРИРОВАНИИ БАЛЛИСТИЧЕСКАГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(*Вывод*)

С помощью дифференциального уравнения Лежандра, а потом и гипергеометрического дифференциального уравнения, автор доказывает Караматино условие интегрировьния баллистического дифференциального уравн ния, каторое имеет вид (3) и каторый при $k=1$, превращается в условие Даламбера.

B. S. POPOV

SUR LA CONDITION D'INTÉGRABILITÉ DE KARAMATA DE L'ÉQUATION DE LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE

(*Résumé*)

1. Soit donnée l'équation différentielle de la balistique

$$(y+\rho)\,y'+y^2-1=0, \tag{1}$$

où la fonction $\rho(x)$ est de la forme

$$\rho(x)=Ae^{nx}+Be^{-nx}+R,$$

A, B, R et n étant des constantes.

En généralisant la condition d'intégrabilité de d'Alembert

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{n+1}=\frac{R^2}{(2+n)^2}.$$

Karamata[1]) a donné, sous forme de problème, la condition suivante

$$\frac{1}{n^2}+\frac{AB}{k(k+n)}=\frac{R}{(2k+n)^2}, \quad k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots, \tag{2}$$

qui se réduit à celle de d'Alembert pour $k=1$

En ramenant l'équation différentielle (1) à celle de Legendre

$$(y^2-1)\,v''+(cy+b)\,v'+Mv=0, \tag{3}$$

nous allons montrer, en premier lieu, que la condition d'intégrabilité de cette dernière équation, à sovoir

$$k(k-1)+ck+M=0, \quad k \text{ entier}, \tag{4}$$

se réduit justement à la condition d'intégrabilité (2) donnée par Karamata.

En second lieu, étant donné que l'on peut ramener l'équation différentielle (3) à celle des fonctions hypergéométriques

$$\xi(1-\xi)\eta''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi]\eta'-\alpha\beta\gamma=0, \tag{5}$$

nous montrerons que, dans le cas générale de l'équation différentielle (1) peut toujours s'exprimer au moyen des fonctions hypergéométriques $F(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$. D'autre part, étant donné que l'équation hypergéométrique (5) est intégrable par quadrature[2]), lorsque l'un des quatres nombres

$$\alpha, \beta, \gamma-\alpha \quad \text{ou bien} \quad \gamma-\alpha \quad \text{est entier}, \tag{6}$$

nous montrerons que chacune de ces quatres conditions d'intégrabilité se réduit à la condition (2), lorsque l'on passe de l'équation différentielle (5) à l'équation différentielle (1). D'ailleurs ce résultat est presque évident puisque, d'une part, les conditions (6) sont équivalente à la condition (4), lorsqu'on passe de l'éqnation différentielle (5) à l'équation différentielle (3), et d'autre part, la condition (4) est équivalente à la condition (2), lorsqu'on passe de l'équation différentielle (3) à l'équation différentielle (1).

2. Pour ramener l'équation différentielle (1) à l'équation différentielle (3), effectuons d'abord la substitution

$$z=\exp\left(\int\frac{nA}{y^2-1}e^{nx}dy\right).$$

En posant, pour abréger,

$$a=n^2AB, \quad r=nB \quad \text{et} \quad m=n+2, \tag{7}$$

l'équation différentielle (1) se déduit alors à l'équation linéaire du second ordre, suivante

$$(y^2-1)^2z''+(my+r)(y^2-1)z'+az=0. \tag{8}$$

En y effectuant, en second lieu, la substitution

$$z=(y-1)^p(y+1)^q v,$$

p et q étant des paramètres encore indéterminés, (qui me fut suggéré par Karamata), l'équation (8) se réduit à la suivante

$$(y^2-1)^2v''+(y^2-1)\{[2(p+q)+m]y+2(p-q)+r\}v'+P(y)v=0, \tag{9}$$

où l'on a posé

$$P(y)=$$
$$=(p+q)(p+q+m-1)y^2+[2(p^2-q^2)+(m-2)(p-q)+r(p+q)]y+$$
$$+(p-q)^2-(p+q)+r(p-q)+a.$$

Or, on peut toujours déterminer les paramètres p et q et une constante M de manière que le polynome $P(y)$ prenne la forme

$$P(y)=M(y^2-1). \tag{10}$$

En introduisant cette valeur de $P(y)$ dans l'équation différentielle (9) et en y posant, pour abrégér,

$$c=2(p+q)+m \quad \text{et} \quad b=2(p-q)+r, \tag{11}$$

cette équation se réduit à l'équation de Legendre[3])

$$(y^2-1)v''+(cy+b)v'+Mv=0. \tag{12}$$

Or, pour que l'identité (10) ait lieu, il faut que p, q et M satisfont aux conditions

$$\begin{gathered}(p-q)(p+q+m-1)=M,\\ 2(p^2-q^2)+(m-2)(p-q)+r(p+q)=0,\\ (p-q)^2+r(p-q)-(p+q)+a=-M.\end{gathered} \tag{13}$$

On en tire, en tenant compte de relation (7), que

$$p=-\frac{n}{4}\{R+1\pm\sqrt{(R+1)^2-4AB}\},$$

$$q=-\frac{n}{4}\{R-1\pm\sqrt{(R-1)^2-4AB}\},$$

$$M=s(s+n+1), \tag{14}$$

où l'on a posé

$$s=p+q.$$

Mais, en éliminant $(p-q)$ et M des équations du système (13), l'on obtient pour $p+q=s$ l'équation

$$\frac{R^2}{(2s+n)^2}=\frac{AB}{s(s+n)}+\frac{1}{n^2}, \quad (s=p+q), \tag{15}$$

qui est justement de la même forme que la condition d'intégrabilité (2) de Karamata.

Or, pour que l'équation différentielle de Legendre (12) ait pour intégrale particulière un polynome $Q(y)$ de degré k, il faut et il suffit que la condition (4), c. à d. la conition

$$k(k-1)+ck+M=0, \quad k \text{ entier},$$

soit satisfaite. En tenant compte des relations (7), (11 et (14) cette condition se réduit à

$$s^2+(2k+n+1)s+k(k+n+1)=0,$$

c. à d. à

$$s=-k, \quad \text{ou bien} \quad s=-(k+n+1).$$

Ces valeurs de s introduites dans la condition (15) donnent justement la condition d'intégrabilité (2), dans laquelle k est à remplacer d'une part par $-k$, d'autre part par $k+1$.

Remarquons, enfin, que dans ce cas une intégrale particuliere de l'équation de la balistique (1) est donnée par l'expression

$$sy-\frac{nRs}{n+2s}+(y^2-1)\frac{Q'}{Q}=nAe^{nx},$$

$Q(y)$ désignant le polynome du degré k, qui est une intégrale particulière de l'équation de Legendre (12)

3. On parvient au même résultat en réduisant l'équation (12) de Legendre, par les substitutions

$$v(y)=\eta(\xi), \quad 2\xi=y+1, \tag{16}$$

à l'équation hypergéométrique

$$\xi(1-\xi)\eta''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi]\eta'-\alpha\beta\eta=0, \tag{17}$$

où l'on a, d'après (7), (11) et (14

$$\alpha=s, \quad \beta=s+n+1, \quad \gamma=\frac{2s+n+2}{2}-\frac{n^2R}{2(2s+n)}. \tag{18}$$

Étant donné qu'une intégrale particulière de l'équation (17) est la fonction hypergéométrique même

$$\eta=F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

il s'en suit, d'après les substitutions (16), qu'une intégrale particulière de l'équation de Legendre (12) est donnée par

$$v(y)=F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{y+1}{2}\right),$$

d'où il résulte que l'intégration générale de l'équation de la balistique (1) peut s'exprimer au moyen des fonctions hypergéometriques.

D'autre part, en désignant par $P(\xi)$ un polynome en ξ, il est connu[1]) que l'équation différentielle (17) pcssède une integrale particulière de la forme

$$\begin{aligned} &\eta=P(\xi) \text{ lorsque } \alpha \text{ est un entier,}\\ &\eta=\xi^{1-\gamma}P(\xi) \text{ lorsque } \beta \text{ est un entier,}\\ &\eta=(1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta}P(\xi) \text{ lorsque } \gamma-\alpha \text{ est un entier,}\\ &\eta=\xi^{1-\gamma}(1-\xi)^{\gamma-\alpha-\beta}P(\xi) \text{ lorsque } \gamma-\beta \text{ est entier.} \end{aligned} \tag{19}$$

En posant donc, respectivement,

$$\alpha=k, \quad \beta=k, \quad \gamma-\alpha=k, \quad \gamma-\beta=k,$$

k étant un entier, on en tire pour s les expressions suivantes

$$s=k,$$

$$s=n-k,$$

$$s=\frac{n^2(R-1)+2nk}{2(n-2k)}=n\frac{nR-(n-2k)}{2(n-2k)},$$

$$s=\frac{n^2(R+1)+2nk}{4k+2n}=-n\frac{nR+(n+2k)}{2(n+2k)}$$

Ces valeurs de s introduites dans la condition (15) se réduisent toujours à la condition d'intégrabilité (2) de Karamata, où k est à remplacer respectivement par

$$k, \quad -k, \quad -k \quad \text{et} \quad k.$$

Ainsi les quatres conditions de l'intégrabilité de l'équation hypergéométrique (17) se réduisent à la seule condition d'intégrabilité (2) de l'équation de la balistique (1). Quant à l'intégrale de l'équation (1), dans ces cas on l'obtient moyennant les intégrales particulières (19) de l'équation (17).

Index bibliographique

1) Karamata J. — Problème № 3. *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie*, I_2, p. 72 (1949).

2) Forsyth-Jacobsthal, *Lehrbuch der Differentalgleichungen*, 1912, S. 221.

3) Kamke E. *Differentialglechungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, S. 22.

4) Goursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, 1936, p. 6.

ЈОЖЕ УЛЧАР

ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО ТОЛКУВАЊЕ ЗА СРЕДНАТА КРИВИНА

(Примено на 30 јануари 1950 год.)

ЈОЖЕ УЛЧАР

ЕДНО ГЕОМЕТРИСКО ТОЛКУВАЊЕ ЗА СРЕДНАТА КРИВИНА

Целта на овој труд е давање обопштување на едно геометриско толкување на флексијата при просторните криви за средната кривина при површнините, какво што не сретнав во литературата што ми беше достапна.

1. Иследувајќи ја една дадена крива $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$, каде што s е природниот параметар, околу една нејзина точка A, од која што го мериме и лакот s, добиваме со каноничко претставување[1]) на кривата околу таа точка за растојанието d на произволната точка M од кривата до нејзината ректификациона рамнина во A развитието

$$d = \frac{1}{2\rho} \cdot s^2 - \frac{\rho'}{6\rho^2} \cdot s^3 + \cdots,$$

каде што $\frac{1}{\rho}$ е флексијата, а $\rho' = \frac{d\rho}{ds}$, за точката A. Оттука следува

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{s \to 0} \frac{2d}{s^2}. \tag{1}$$

2. Релацијата (1) уште не е подесна за обопштување. Затоа од неа ќе изведеме друга, прилагодена за тоа.

Нека е r растојање на ортогоналната проекција M' од точката M на споменатата ректификациона рамнина до точката A. Тогаш, поради

$$\lim_{s \to 0} \frac{r}{|s|} = 1,$$

---

1) Види на пр.: W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* Bd. I, Berlin, 1945, S. 26.

што лесно се покажува, важи освен (1) и релацијата

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{r \to 0} \frac{2d}{r^2}. \tag{2}$$

3. Сега можеме да покажеме дека при површината $z = z(x, y)$ за нејзината средна кривина H во секоја точка за која што функцијата $z(x, y)$ дозволува развивање[1]), важи релацијата, сосем аналогна на (2).

Важи имено

$$\boxed{H = \lim_{r \to 0} \frac{2\,d_{cp}}{r^2}}, \tag{3}$$

каде што d_{cp} е средно растојање на оние точки од површината што се на исто растојање r од нормалата на површината во A, до тангенцијалната рамнина на таа површина во A.

Доказ:

Правоаглата координатна система ја поставуваме така да во развитието на функцијата $z(x, y)$ околу тачката A, за која што не интересува средната кривина на површината, одпадне константниот, линеарните и мешаниот квадратен член. Равенката па површината — нејзиното каноничко развитие — е тогаш

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + \cdots. \tag{4}$$

Површината (4) ја има xy - координатната рамнина како своја тангенцијална рамнина во A, x- и y- оски како главни правци во A, а главните кривини за таа точка се

$$\frac{1}{R_1} = a, \quad \frac{1}{R_2} = b.$$

Прејдувајќи кон поларните координати

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi$$

добиваме, за $r = \text{const.}$,

$$2\pi r d_{cp} = \int_0^{2\pi} z r d_{cp} = \frac{\pi}{2} r^3 (a + b) + r^4 (\cdots),$$

или

$$2 d_{cp} = r^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + r^3 (\cdots)$$

и, поради $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, и релацијата (3).

[1]) Доволно би било да се претпостави само дека функцијата има во некоја околина на таа точка непрекинати парцијални изводи до вклучително трети ред.

И. УЛЧАР

ОДНА ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

(*Вывод*)

В этой работе дано обобщение одной геометрической интерпретации флексии пространственных кривых для средней кривизны поверхности.

Исходя от известной релации

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{s \to 0} \frac{2d}{s^2},$$

где $\frac{1}{\rho}$ представляет флексию данной кривой линии в некоторой точке A, d расстояние произвольной точки M кривой до её ректификационной плоскости в точке A, а s длину дуги кривой линии от A до M, — приходим к реляции

$$H = \lim_{r \to 0} \frac{2d_{cp}}{r^2},$$

где H средняя кривизна данной поверхности в некоторой точке A, а d_{cp} — среднее расстояние точек, находящихся на растоянии r от нормали к поверхности в точке A, до касательной плоскости к поверхности в точке A.

JOŽE ULČAR

EINE GEOMETRISCHE DEUTUNG DER MITTLEREN KRÜMMUNG

(*Auszug*)

Hier handelt es sich um eine Verallgemeinerung einer geometrischen Deutung der ersten Krümmung der Raumkurven auf die mittlere Krümmung der Flächen, welche ich in der mir zugänglichen Literatur nicht begegnet habe.

1. Für eine gegebene Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)$, wo s ihr Bogen, gemessen aus einem ihren Punkte A, ist, gibt uns ihre kanonische Darstellung für die Entfernung d eines beliebigen Punktes M der Kurve von ihrer rektifizierenden Ebene in A die Entwichlung

$$d = \frac{1}{2\rho} \cdot s^2 - \frac{\rho'}{6\rho^2} \cdot s^3 + \cdots$$

wobei $\frac{1}{\rho}$ die erste Krümmung, $\rho' = \frac{d\rho}{ds}$, für den Punkt A ist. Demnach wird

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{s \to 0} \frac{2d}{s^2}. \tag{1}$$

2. Aus der Relation (1), die noch nicht für Verallgemeinerung geeignet ist, bekommt man, wenn man mit r die Entfernung der Ortogonalprojektion M' des Punktes M auf die erwähnte rektifizierende Ebene vom Punkte A bezeichnet, wegen

$$\lim_{s\to 0}\frac{r}{|s|}=1,$$

was man leicht nachweist, die für Verallgemeinerung angepaßte Relation

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{r\to 0}\frac{2d}{r^2} \qquad (2)$$

3. Man beweist jetzt gleich daß es bei der Fläche $z=z(x,y)$ für ihre mittlere Krümmung H in jedem ihren Punkte, wo die Funktion $z(x,y)$ Entwicklung erlaubt - oder mindestens in einer Nähe dieses Punktes partielle stetige Ableitungen bis einschließlich dritter Ordnung hat - eine der Relation (2) ganz analoge Beziehung besteht.

Es gilt nämlich

$$\boxed{H=\lim_{r\to 0}\frac{2d_m}{r^2}}, \qquad (3)$$

wo d_m die Mittelentfernung der im Abstand r von der Flächennormale durch A sich befindenden Flächenpunkte von der Tangentialebene der Fläche im A ist.

In der Tat, wählt man die Tangentialebene in A als xy-Koordinatenebene, dann bekommt man bei geeigneter Wahl der x- und y- Achse für die Flächengleichung ihre kanonische Entwicklung

$$z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)+\cdots,$$

wo $a=\frac{1}{R_1}$ und $b=\frac{1}{R_2}$ die Hauptkrümmungen der Fläche in A sind. Geht man dann zu den Polarkoordinaten

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$$

über, bekommt man bei $r=$const.

$$2\pi r\,d_m=\int_0^{2\pi} z\,r\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\,r^3(a+b)+r^4(\cdots),$$

oder

$$2\,d_m=r^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+r^3(\cdots)$$

und, wegen $H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$, die Beziehung (3).

ЛАВ В. ЛОЗИНСКИ

ПРИЛОГ ИЗУЧАВАЊУ ФИЗИОЛОШКОГ ДЕЈСТВА ЕКСТРАКТА ФИЛАТОВ-ПЛАЦЕНТЕ

(Примљено 8 фебруара 1950 год.

ЛАВ В ЛОЗИНСКИ

ПРИЛОГ ИЗУЧАВАЊУ ФИЗИОЛОШКОГ ДЕЈСТВА ЕКСТРАКТА ФИЛАТОВ-ПЛАЦЕНТЕ

Саопштење III.

Проблем биогеног стимулатора није више нов. У оном смислу и обиму, у коме га нам претставља *Филатов*[1]), он је поникао у клиници, где је прошао кроз бројна посматрања резултата пробно-емпиријске примене ткивне терапије и тек касније је продро у експеримент обухватајући многе методе биохемијског и физиолошког испитивања. Али и после више од једне деценије истраживања, природа тог фактора је остала до данас непозната.

У принципу ради се о продуктима метаболизма коренито промењеног сублеталним условима живота једног органског система. Под утицајем тих и таквих услова долази до преформације постојећих — вероватно — ферментних система са настајањем нових система и њихових творевина (*Благовешченски*[2]). Те супстанце (трансформати) одликују се великом активношћу у стимулацији многих организмових процеса и по каталитичком типу дејства потсећају на ергине — у најширем смислу, ма да се *Филатов* одлучно противи да им припише ферментну природу.

Конкретно, — ако се једно (биљно или животињско) ткиво, издвојено из организма за живота или непосредно после смрти, стави у услове успореног изумирања (обично се служимо са температурама од око + 4° С) и задржи у тим и таквим условима дуже време (до 30 дана) — у ткиву се формирају супстанце чија се неспецифична активност обелодањује у низу стимулација различитих функција и особина

---

[1]) Филатов: Ткивна терапија, Наркомздрав СССР Медгиз 1945.
[2]) Наведено по Филатову op. cit.

оног организма у који би те супстанице биле евентуално унесене. Служећи се клиничком терминологијом, рекло би се да у првом реду оне стимулирају одбранбене и регенеративне организмове моћи *(Кроненберг)*[1]). Видећемо касније да таква генерализација допушта извесна прецизирања[2]).

*
* *

Активност биогеног стимулатора изгледа није у правој сразмери са концентрацијом протидних материја у средини у којој је формиран. Низ аргумената као да потврђују ову претпоставку, према којој би се закључило да тај фактор није протидне природе нити је везан за протид:

1) Активност је маркантна и у великим разблажењима матичног раствора *(Филатов)*[3]).

2) Активност није смањена, а у неким случајевама чак појачана после термичког таложења беланчевина у раствору *(Филатов)*[4]).

3) Активност је марикантна и код екстраката биљних ткива који у норми садрже трагове протида до 0,06 промила *(Скородинска)*[5]).

3) Активност је маркантна и код екстраката биљних са претходним термичким таложењем *(Кецкаровски* и *Лозински).*

Ове чињенице, као и наглашена термостабилност *(Филатов, Нешић)* као да заиста поричу енциматичну природу биогеном стимулатору, уколико се у ред фермената принципијелно не могу унети супстанице отпорне према температурама термичке стерлизације дужег трајања 2 сата на 120°C *(Нешић)* и невезане за протид.

Да ли се у појави биогеног стимулатора ради о формирању нових енцимоидних супстанца, или само о активирању већ постојећих система у потенцијалном стању, заиста је

---

[1]). Kronenberg: Placental extract for keratitis. Americ. Journal of Ophthalmology Vol. 31, № 9, 1948.

[2]) *Напомена:* Радови на експерименталном изучавању дејства екстракта Филатовплаценте били су предузети у сарадњи са А. Кецкаровским и В. Кортингом, који су израдили два прва саопштења. Она су из техничких разлога остала засад у рукопису.

[3]) Филатов: op. cit.

[4]) Ibid.

[5]) В. В. Скородинска: Терапијски значај лишћа алое (дисертација) Зборник за 70-тогодишњицу акад. В. Филатова. Одеса обл. изд. 1946. — на руском.

тешко рећи на основу постојећег материјала, али се аналогија у сваком случају намеће. У том смислу занимљива је хипотеза *Благовешченског*[1]):

„Код животињске и биљне живе ћелије доспевају у услове за које нису прилагођене на основу целокупног тока свог филогенетског развитка, код њих долази до поремећаја у координацији посебних ферментативних процеса. У најједноставнијем случају, наиме код снижавања температуре, термички коефициент ван-т-Хоффа се мења неједнако за хидролитичке и синтетичке процесе с једне стране, за оксидо-редуктивне — са друге. То може да доведе до појаве у ћелији продуката секундарне промене аминокиселина, масних киселина, илкохола и шећера. Те супстанце после повратка условима нормалним за живот ћелија, или код уношења њиховог у други организам, могу да се једине са инертним беланчевинама и да их активизирају, а у случају већ активних фермената — да их дигну на виши енергетски ниво. . .

„. . . Према нашој тачки гледишта, проблем „фактора отпора“ (биогених стимулатора) тиме је сведен на формирање у сублеталним условима супстанца, врло вероватно незасићеног типа, које активирају беланчевинске фероне фермената снижавајући енергију активније оних реакција које оне катализу, и тиме као да подмлађују ћелије организма“.

Према овоме, а и према клиничким искуствима у можда још већој мери, изгледа да се ради о једном веома снажном фактору, са којим се рукује на приближан начин. Из радова, до којих смо могло доћи за последње две године није се могло видети да се радило са стандардизованим препаратима, нити да је одређена меродавна дозажа и тест. Једино *Кроненберг* даје проценат раствора сувог остка екстракта, справљеног по *Филатов*-љевом принципу, али без примене високе температуре, али и тиме се свакако не даје претстава о релативном потенцијалу екстракта. Методика *Нешића* за справљање »succus placentae«, у којој екстракциона средина је само вода саме плаценте, такође не може се сматрати за стандардну, јер суви остатак разних серија справљања показивао је разну процентуалну тежинску вредност. Исти је случај и са ултрафилтрираним екстрактом *Кецкаровског* и *Лозинског*. Разумљиво је, да се у ова последња два случаја још мање може говорити о стандарду него у случају методике *Кроненберга*.

Све је то схватљиво из простога разлога што нам нису познате све, или бар маркантније, особине екстракта *Филатов*-

[1]) Наведено по Филатову op. cit.

плаценте, односно биогеног стимулатора, који се у њему наводно налази. И зато нам изгледа да би најпре требало одредити те и такве особине да се искуства не би кретала, као досад, у квалитативном и, углавном, у емпиријском правцу.

Радови у којима овај прилог претставља трећи покусни део, били су предузети са сврхом да се у низу познатих и непознатих особина екстракта *Филатов*-плаценте изнађе једна (или више) довољно маркантна и специфична да би могла да послужи евентуално за касније одређивање теста. Није потребно посебно наглашавати значај таквог одређивања.

*

* *

Из клиничких искустава, нарочито оних који су објавили *Цветојевић* и *Кецкаровски*, изгледало је упадљиво дејство екстракта као стимулатора на нервни систем. Занимљивост тих искустава се појачава изјавом *Филатова* да се „засад не може ништа одређено рећи о улози нервног система у процесу реконвалсценције под упливом лечења конзервисаним ткивима. . .“ И пошто се и иначе дејство екстракта, у коме се претпоставља присуство биогеног стимулатора на нервни систем није проучавано експериментално, били смо мишљења да огледи на високо организираним животињама (Vertebrata) треба да почну баш на том терену.

*

* *

Огледи су били извођени на Ескулентама третираним плацентраним екстрактима разног порекла, начина израде и потенцијала, и коначно сензибилизираним за светлост помоћу еозина (Eosin *Ciba, wasserlösslich, gelbich)*. Упред експерименту одређена је оптимална доза еозина. Гранична доза, још неотровна за животиње у мраку, а летална за њих ако се изложе утицају сунчане светлости, износи 0,02 ccm на грам тежине 4%-ног раствора еозина. Све инејекције су вршене помоћу једног Луершприца баждареног до 0,02 ccm иглом за хиподермне инјеције у лимфне кесе животиње.

Животиње су узимане робустне и полно зреле, тежине од 65 до 130 грама. Пре почетка огледа су гладовале најмање 10 дана, у току огледа такође нису храњене, држане су свака понасоб у емаљираним посудама са решетком у мало воде смењиване свакодневно.

Хронолошки оглед је протицао на следећи начин:

Прва серија од 3 животиње (са две контролне) добијала је плацентарни екстракт у току од 5 до 6 дана у дозама од 1,20 ccm и 0,40 ccm плацентарног екстракта израђеног од Кецкаровског и Лозинског и 1,20 ccm »succus placentae« — од Нешића. Пре почетка третмана све су мерене са тачношћу + — 1 грам. После означеног времена третмана екстрактом свих 5 животиња је добило одговарајуће (на грам тежине) дозе раствора еозина и стављено у мрак на 18 сати. После тог времена све животиње су имале изразиту флуоресценцију зенице и равномерно обојен абдомен. Стављене на сунце све су угинуле са јасним знацима централне клонулости, којој је претходила фаза изразите ексцитације. Непосредно пред смрт показивале би стање слично тетаничном („говорничка поза"). Ове опште примедбе, као и већи губитак у тежини и стално раздражљиво стање животиња третираних екстрактом, вреде за све серије огледа. Услови (бројни) и резултати су дати у табели I.

Табела I.

Ред. број	Количина и врста екстракта	Време третмана	Време умирања	Губитак тежине	Примедба
1	1,20 S. P	6 дана	18′	12 гр.	веома немиран
2	1,20 E. P.	5 „	45′	8 „	немиран
3	0,40 E. P.	5 „	око 2^h	5 „	
4	контрола		око 1^h	4 „	
5	контрола		40′	5 „	

S. P. — „succus placentae" аутолизиране — Нешић
E. P — „extract um placentae" „ — Кецкаровски и Лозински

Друга серија од осам животиња била је распоређена на следећи начин:

1) Четири животиње су добијале свакодневно у току 12 односно 11 дана, succus placentae по Нешићу у дозама 0,20; 0,50; 1,30 и 1,50 ccm. Тај succus placentae је био справљен по уобичајеном Филатовљевом поступку са методиком Нешића, тј. плацента је била пре екстрације конзервисана (аутолизирана).

2) Две животиње су добијале succus placentae неаутолизиране, али справљане по истом начину екстракције, у дозама 0,40 и 1,50 ccm.

3) Две животиње контролне.

Трећа серија је уствари поновљени други оглед са 4 животиње по распореду означеном у табели III.

Табела II.

Ред. број	Количина и врста екстракта	Време третмана	Време умирања	Губитак тежине	Примедба
	SPAN				
1	0,20	12	20′	8 гр.	
2	0,50	12	11′	12 „	
3	1,30	11	одмах	14 „	
4	1,50	11	одмах	13 „	
	SPNAN				
5	0,40	10		6 „	жив
6	1,50	11		1 „	жив
7	контрола		око 3^h	5 „	
8	контрола		„ 4^h	4 „	

SPAN: „succus placentae autolisatae" — Пешић
SPNAN: „succus placentae non autolisatae" — Пешић

Табела III.

Ред. број	Количина и врста екстракта	Време третмана	Време умирања	Губитак тежине	Примедба
	SPAN				
1	0,50	9	15′	10 гр.	
2	1,50	9	одмах	15 „	
	SPNAN				
3	1,50	12		6 „	нађен мртав тек идућег дана
4	контрола		око 3^h	7 „	

Према овим огледима изгледало би да се активни принцип образован у плацентарном ткиву под утицајем услова означених горе, испољава пре као синергетичар фотодинамичког дејства еозина него као стимулатор одбрамбених организмових могућности против једне ноксе нервног система — што би било природно претпоставити према генерализацији особина биогеног стимулатора по *Кроненбергу*, која је изнесена у почетку овог прилога.

С друге стране, познато је да трагови беланчевинских материја укидају, или јако инхибирају фотодинамички ефект еозина. Према томе, ако се узме у обзир високи протидни процент плацентарног сока (по Пешићу), могло би се очекивати да ће се тај ефект еозина укинути, ако не због специфичног утицаја на отпорне моћи организма од стране биогеног стимулатора, а оно бар због беланчевинске компоненте сока (као што се то уосталом види из табл. II ред. бр. 5 и 6;

из табл. III, ред. бр. 3). Међутим инхибициони момент изгледа да је снажно потиснут стимулатором, који је у овим случајевима стимулирао — фотодинамичко дејство еозина. Није можда без интереса напоменути да аналогни синергетички утицај на еозинизиране животиње врши стрихнин. Та претпоставка би се уосталом појачала понашањем жаба за време третмана екстрактима: упадљива преосетљивост и реактивност, а под дејством сунчане светлости — тетаноидна симптоматика у прелеталној фази („говорничка поза").

Рађено у Физиолошком заводу Природно-математичког факултета у Београду

ЛЕВ В. ЛОЗИНСКИЙ

ПРИЛОЖЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ЭКСТРАКТА ПЛАЦЕНТИ ПО ФИЛАТОВУ

(Резюме)

В опытах, чьи результаты приведены, в прилагаемых таблицах, изучалось действие биогенного стимулятора на нервную систему Ranae esculentae в фотодинамическом шоке эозина.

Эскуленты третировались длительное время (до 12-ти дней) относительно большими дозами плацентарного экстракта (succus placentae — по Нешичу) и затем подвергались фотодинамическому действию эозина.

Из результатов можно вывести заключение, что биогенный стимулятор стимулирует нервную систему таким образом что ускоряет время наступления смерти, и, принимая во внимание еще и постояное повышение возбуждаемости и большую потерю в весе у третированиъх экстрактом, биогенный стимулятор аналогичен в этом и таковом своем влиянии со стрихнином.

L. LOZINSKI

EFFECTS OF FILATOV'S EXTRACTS ON EOSIN-SENSITIZED FROGS

(Excerpt)

According to the clasical concepts of FILATOV and KRONENBERG with a pretty good deal of probability it could be exespected, that treatment of eosin-sensitized frogs with placenta-extracts would inhibit or alterate the well-known phenomena of light-stroke (photoplectic insult). As a matter of fact, the bio-assays done by the author revealed, that injection of FILATOV-extracts into eosin-sensitized and the light-exposed frogs, quite opposite to the introductory assumption, with a fairly degree of certainly leads to an evident shortening of life-time. It is noteworthy, that this effect could only be established, when using FILATOV's-extracts, i. e. 8—25 days autolysed placenta extracts, and were not to be observed, when fresh-placenta extracts were employed. In the latter case, a prolonging of life-time was observable, which in the autor's opinion is due to a simple protein-protective mechanism present in fresh placenta extract.

СОДРЖИНА — TABLE DES MATIÈRES